Әл-Фараби атындағы Қазақ Ұлттық Университеті

ӘОЖ 517.956.46 (043) Қолжазба құқығында

ЖАНУЗАКОВА ДИНАРА ТАУПИХОВНА

Фильтрация теориясының тура және кері есептерін жуықтап шешу әдістері

6D060100 – Математика

Философия докторы (PhD)
дәрежесін алу үшін дайындалған диссертация

Отандық ғылыми кеңесшілер:
Мухамбетжанов С.Т.,
ф.-м.ғ.д., профессор

Айтжанов С.Е.,
ф.-м.ғ.к., доцент

Шетелдік ғылыми кеңесші:
Кершнер Р.,
ф.-м.ғ.д., профессор
Печ университеті, Венгрия

Қазақстан Республикасы
Алматы, 2023

МАЗМҰНЫ

НОРМАТИВТІК СІЛТЕМЕЛЕР

Бұл диссертациялық жұмыста келесі стандарттарға сілтемелер қолданылды:

МЕМСТ 7.1-84. Ақпарат, кітапхана ісі және баспа ісі бойынша стандарттар жүйесі. Құжаттың библиографиялық сипаттамасы. Жалпы талаптар және құрастыру ережелері;

МЕМСТ 7.9-95 (ISO 214-76). Ақпарат, кітапхана ісі және баспа ісі бойынша стандарттар жүйесі. Реферат және аңдатпа. Жалпы талаптар.

ҚР МЖМБС 5.04.034-2011. Қазақстан Республикасының мемлекеттік жалпыға міндетті білім беру стандарты. Жоғары оқу орнынан кейінгі білім беру. Докторантура. Негізгі ережелер;

МЕМСТ 7.32-2017. Ғылыми-зерттеу жұмысы туралы есеп. Құрылымы және рәсімдеу ережелері;

МЕМСТ 8.417-81. Өлшем бірлігін қамтамасыз етудің мемлекеттік жүйесі. Физикалық шамалардың өлшем бірліктері.

КІРІСПЕ

Бұл диссертациялық жұмыс фильтрация теориясында туындайтын кейбір математикалық модельдер үшін қойылған тура және кері есептерді зерттеуге арналған, яғни фазалық ауысуды ескеретін фильтрация теориясының математикалық моделі, псевдопраболалық теңдеу үшін қойылған бастапқы-шеттік есебі, параболалық типті теңдеуге қойылған кері есебі, реакция-диффузия есебі қарастырылады. Осы типтегі теңдеулер және Соболев типті жалпы теңдеулер фильтрация теориясында жылу және масса алмасу процестерін сипаттауда, жер-топырақтағы ылғал тасымалдауда, плазма физикасында, популяцияда және көптеген басқа салаларда пайда болады.

Зерттеу өзектілігі. Қолданбалы ғылымдар (гидродинамика, геофизика және т.б.) бір мезгілде дерлік математика үшін есептердің екі түрін алға қойды, оларды шартты түрде «тура есеп» және «кері есеп» деп атауға болады. Кері есептердің тура есептерден айырмашылығы, оларда тек дифференциалдық теңдеулердің шешімдері ғана емес, сонымен қатар теңдеулердің өздері немесе осы шешімдердің анықталу облысының шекаралары (шекарасының бір бөлігі) іздестіріледі.

Нақты әлемде орын алған көптеген үрдістердің математикалық пішіндеуі математикалық физиканың теңдеулері үшін тура және кері есептерді зерттеуге әкеледі. Кері есептер теориясы заманауи дифференциалдық теңдеулер теориясының белсенді дамып келе жатқан саласы.

Математикалық физикада тура есептер деп әдетте кез келген физикалық өрістерді, процестерді немесе құбылыстарды (электромагниттік, акустикалық, сейсмикалық, жылулық және т.б.) модельдеу есептері ретінде түсініледі. Тура есептерде зерттелетін аумақтың әрбір нүктесінде және уақыттың әрбір сәтінде (егер өріс тұрақты емес болса) физикалық өрісті немесе процесті сипаттайтын функцияны табу талап етіледі.

Тура есепті шешу үшін келесі шарттар беріледі:

- процесс зерттелетін аймақ;
- осы процесті сипаттайтын теңдеу;
- бастапқы шарттар (процесс стационарлық емес болса);
- зерттелетін аймақтың шекарасындағы шарттар.

Кері есептерде ізделінді функциядан басқа тура есепке кіретін кез - келген функциялар белгісіз болуы мүмкін. Бұл белгісіздер кері есептің шешімі деп аталады. Оларды анықтау үшін берілген теңдеулерде тура есептің шешімі туралы қосымша мәліметтер қосылады, яғни кері есептің деректері. (Кейде кері есептің деректеріне тура есептің белгілі коэффициенттері де кіреді – нұсқалары көп). Бастапқы да, шекаралық шарттар да белгісіз болуы мүмкін. Ω аймағының өзі (немесе оның шекарасының бір бөлігі) белгісіз болуы мүмкін.

Дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер үшін қойылған кері есептер деп дифференциалдық теңдеулердің белгісіз коэффициенттерін, оң жағын, шекаралық немесе бастапқы шарттарын, аймақтың шекарасын табуға арналған есептерді айтады. Бастапқы-шеттік есептердің белгісіз элементтері теңдеулерді шешу туралы кейбір қосымша ақпараттармен анықталады. Мұндай ақпарат қосымша шарттардың әртүрлі түрлері болып табылады.

Кері есептер теориясы дифференциалдық теңдеулер саласындағы маңызды дербес зерттеу бағыты болып табылады.

Кері есептер теориясы ғылымның барлық дерлік салаларында практикалық мәселелерді шешу үшін кеңінен қолданылады, атап айтқанда, келесі салаларда:

- физика (кванттық механика, оптика, акустика, электромагниттік тербелістер, серпімді деформациялар, молекулалық тербеліс теориясы, шашырау теориясы, диффузия процестеріне электродинамика және т.б.);
- гидродинамика (фильтрация теориясы);
- геофизика (сейсмикалық, электрлік, гравитациялық, магниттік, каротаждық, магнитотеллурлық зондтау, гравиметрия, кескінді өңдеу және т.б.);
- медицина (рентгендік томография, компьютерлік томография, ЯМР томография, УДЗ және т.б.);
- экология (ауаның, судың жағдайын диагностикалау, ғарыштық мониторинг және т.б.);
- экономика (оңтайлы басқару теориясы, қаржылық математика және т.б.).

Кері және қисынды емес есептер бойынша алғашқы басылымдар 20 ғасырдың бірінші жартысында пайда болды. Олар физиктердің (кванттық шашырау теориясының кері есептері, электродинамика, акустика), геофизиктердің (электр барлаудың кері есептері, сейсмика, потенциалдар теориясы), астрономия және жаратылыстану ғылымының басқа салаларының зерттеулерімен байланысты болды. Қуатты компьютерлердің пайда болуымен кері және қисынсыз есептерді қолдану саласы математикалық әдістер қолданылатын барлық дерлік ғылыми пәндерді қамтыды. Қолданудың негізгі бағыттары - геофизика, астрономия, деректерді визуализациялау, медициналық және өндірістік томография, ақауларды анықтау және қашықтықтан зондтау және т.б.

Математикалық физиканың тура есептерінде зерттеушілер дыбыстың, жылудың, сейсмикалық тербелістердің, электромагниттік толқындардың және т.б. таралу сияқты әртүрлі физикалық құбылыстарды сипаттайтын функцияларды (айқын түрде немесе жуық) табуға ұмтылады. Бұл жағдайда ортаның қасиеттері (теңдеулердің коэффициенттері), сондай-ақ процестің бастапқы күйі (стационарлық емес жағдайда) немесе оның шекарадағы қасиеттері (шектелген аймақ жағдайында және/немесе стационарлық жағдайда) белгілі деп есептеледі. Дегенмен, тәжірибеде көбінесе ортаның қасиеттері белгісіз болып табылады. Ал бұл дегеніміз, не теңдеулердің коэффициенттерін, не белгісіз бастапқы немесе шекаралық шарттарды немесе зерттелетін процесс жүретін аймақтың орналасқан жерін, шекараларын және басқа қасиеттерін анықтау қажет болатын кері есептерді қою керек және шешу қажет. Бұл есептер көп жағдайда қисынды қойылмаған. Ал теңдеулердің ізделінді коэффициенттері әдетте зерттелетін ортаның тығыздығы, электр өткізгіштігі, жылу өткізгіштігі және басқа да маңызды қасиеттері болып табылады. Сондай-ақ, кері есептерде өте жиі (жылу, тербеліс, кернеу, ластану) көздерін, орналасқан жерін, қосындылардың пішіні мен құрылымын, ақауларды және т.б. табу қажет. Қолдану аясының осындай кеңдігімен кері және қисынсыз қойылған есептер теориясы пайда болған кезден бастап қазіргі ғылымның ең қарқынды дамып келе жатқан бағыттарының біріне айналуы ғажап емес. Кері және қисынды емес есептердің ортақ бір маңызды қасиеті бар -деректерді өлшеудегі кішігірім қателіктеріне қатысты шешімнің орнықсыздығы. Көптеген қызықты жағдайларда кері есептер қисынсыз болады, ал қисынсыз есептер, әдетте, кейбір тура (қисынды) есептерге қатысты кері деп тұжырымдауға болады.

Осылайша, жекелеген кері есептер ұзақ уақыт бойы әртүрлі білім саласындағы ғалымдардың зерттеу нысаны болды. Классикалық Коши-Ковалевская теоремасынан кең ауқымды кері есептердің шешімі бар және жалғыз, бірақ аналитикалық функциялар класында ғана болатыны шығады. Л.В.Овсянников шығарылатын айнымалыға (выводящая переменная) қатысты аналитикалық талапты айтарлықтай әлсіретуге болатынын дәлелдеді. В.Г.Романов Л.В.Овсянников пен Л.Ниренбергтің Банах кеңістігінің масштабтар әдісін дамыта отырып, кері есептердің кең ауқымы үшін екі айнымалы бойынша – шығарылатын кеңістіктік айнымалысы тұрғысынан және уақыт айнымалысы тұрғысынан аналитикалық шарттан құтылуға болатынын көрсетті. Бұл зерттеулер геофизиканың көп өлшемді кері есептерін зерттеуге жол ашты, оның негізгі моделі көлденең қабатты орта болып табылады. Кері есептердің пайда болуы мен дамуына Новосибирск Академиясында жұмыс істеген ғалымдар – В.Е.Захаров пен А.Б.Шабат (кері шашырау есебінің әдісі), А.С.Алексеев және С.В.Голдин (геофизиканың кері есептері), Кабанихин С.И. (геофизика, акустика, электродинамиканың кері есептері), Кожанов А.И. (Соболев типті есептер) елеулі үлес қосты. Кері шашырау есебінің әдісі математикалық физиканың сызықты емес теңдеулерін (Кортевег-де Вриз теңдеуі, сызықты емес Шредингер теңдеуі, Кадомцев-Петвиашвили теңдеуі және т.б.) шешу үшін қолданылды және математика мен физиканың әртүрлі салаларында (дифференциалдық операторлардың спектрлік теориясы, классикалық алгебралық геометрия, релятивистік шектер және т.б.) жаңа зерттеулерді ынталандырды. Кері шашырау есебінің әдісі XX ғасырдағы математикалық физиканың інжу-маржаны деп аталады. А.С.Алексеев пен С.В.Гольдиннің кері есептердің спектрлік теориясын және интегралдық геометрияны геофизикада қолдану нәтижелері көптеген геофизикалық әдістердің (кері кинематикалық және динамикалық сейсмикалық есептер) теориялық негізі болды.

Гидродинамикада қабылданған терминология бойынша әрі қарай бос шекаралары бар есептер деп аталатын кері есептердің соңғы түріне гидродинаминаның ағынды есептері, серпімді-пластикалық есептер, фазалық күйі өзгеретін ортада жылу таралу есептері жатады (Стефан типті есептер) және т.б.

Фильтрация теориясы – гидродинамиканың кеуекті орталар, яғни өзара байланысқан қуыстар (кеуектер) жүйесі арқылы енетін денелер арқылы сұйықтардың қозғалысын зерттеуге арналған бөлімі. Көптеген табиғи денелер кеуекті болады: топырақ, тау жыныстары, ағаш, тері, сүйек, жануарлардың жұмсақ тіндері, сонымен қатар жасанды материалдар: құрылыс (бетон, кірпіш), тағам (нан), жасанды былғары, керамика, ұнтақ металлургиясының нәтижесінде алынған металл бөлшектер және т.б. Егіншіліктің негізі ретінде қызмет ететін жердің жоғарғы қабаты - топырақ кеуекті болады. Бұл қарапайым мысалдардың өзі кеуекті орта адамдар өмірінде атқаратын орасан зор рөлін көрсетеді. Осы материалдардың барлығына тән қасиет - сұйықтықты өздігінен жинақтау және оның сыртқы күштердің әсерінен қозғалуына мүмкіндік беру. Біздің өміріміздің кем дегенде үш маңызды аспектісі сұйықтықтардың кеуекті орта арқылы қозғалысына тікелей байланысты. Біріншіден, бұл сұйықтықтардың тірі ағзалардағы кеуекті биоматериалдар арқылы қозғалысы - жасушалар мен ұлпалардағы сұйықтық алмасуы, ағаштар мен дәнді дақылдардағы шырындардың қозғалысы және басқа да көрінбейтін сыртқы қозғалыстар қоректік заттарды жасушаларға тасымалдануын және организмдерден зиянды қалдықтарды шығару процестерін басқарады. Бұл процестерді ферменттер және басқа белоктар басқарса да, сұйықтықтарды тасымалдаудың өзі барлық жасушалар мен барлық тіршілік иелерінің өмірінде үлкен рөл атқарады. Дәл осындай рөлді топырақтағы ылғалдың қозғалысы да атқарады. Сайып келгенде, бұл өсімдіктерге қоректік заттар әкелетін және барлық тіршілік иелерінің қоректенуіне негіз болатын сүзілген немесе топыраққа сіңетін су. Топырақ ылғалдылығының қозғалысы, суару мен суаруды дұрыс ұйымдастыру фильтрация теориясының маңызды міндеттерінің бірі болып табылады. 20 ғасырдың негізгі энергия көздері – мұнай мен газ жер асты терең қабаттарынан алынады. Бұл кеуекті қабаттарда мұнай мен газдың жиналуы және негізгі өндіру (шығару) технологиялары сүзу теориясының заңдарымен реттеледі және оның есептердің негізгі көздерінің бірі болып табылады.

Жарылған кеуекті ортадағы сұйықтық ағынының процесі дәрежелік асимптотикамен таралу заңдарына бағынатын аномалді кинетикамен сипатталады. Бұл матрицалық кеуекті блоктардан және жарықшақтар жүйесінен тұратын осы орталардың күрделі ішкі геометриялық құрылымына байланысты. Жарықшақтың қасиеттеріне тәуелді болғандықтан, жарықшақтар ағынның үлгісіне айтарлықтай әсер етеді. Кеуекті ортадағы сұйықтық ағынының процесін бағалау үшін жарықшақтардың таралуын түсіну маңызды екені белгілі.

Табиғаттағы сұйықтықтардың барлығы дерлік ерітінділер, яғни олар екі немесе одан да көп заттардың (компоненттердің) қоспасы. Құрамында ілеспе (еріген, суспензияланған) қатты заттары бар сұйықтықтар мен газдардың кеуекті орталардағы фильтрациясы осы заттардың диффузиясымен және сұйық (газ) сатысы мен қатты саты арасындағы масса алмасуымен бірге жүреді.

Соңғы бірнеше онжылдықтарда осы күрделі түзілімдердегі ағындар мен көшу динамикасын сипаттау үшін бірнеше айтарлықтай әртүрлі тұжырымдамалық тәсілдер ұсынылды. Бұл тәсілдер М.Маскаттың, М.Мерестің, М.Левереттің, Г. Дарсидің және басқа да көптеген еңбектерінде ұсынылған классикалық фильтрация теңдеулерінің негізгі теңдеулерін түрлендіруге негізделген. Ең жүйелі дәл модельдерді А.М. Мейрманов [8, 10], Н.Т.Данаев, С.Т. Мухамбетжанов[1,6,7,9,92], И.А. Калиев[2,5,6] және тағы басқа ғалымдар зерттеген.

Фазалық ауысулардың математикалық сипаттамасына арналған бірінші жұмыс 1831 жылы жарық көрген Ламе мен Клапейронның мақаласы болса керек. Ол жұмыста жартылай кеңістікті алып жатқан және шекарадағы тұрақты температураның әсерінен бастапқы сәтте фазалық ауысу температурасында болатын біртекті сұйықтықтың қату процесі зерттелген. 1889 жылы австриялық физик Йозеф Стефан полярлық мұздың еруін сипаттайтын модельді ұсынды. Бірқатар жұмыстарда ол бір өлшемді бір фазалы және екі фазалы есептердің бірнеше аспектілерін қарастырды. Оның моделіне енгізілген бұл жұмыстар мен маңызды белгілер кейіннен оның есімімен аталатын есепке негіз болды.

Фазалық ауысу процесін сипаттайтын математикалық модель-жылжымалы шекарасы бар есеп (Стефан есебі).

Стефан есебі - таза заттағы (яғни қоспасыз) температуралық өріс пен фазалық ауысу шекарасын анықтау есебі.

Ол келесі физикалық аспектілерді қамтиды:

- ортаның агрегаттық күйі тек жылу өткізгіштік пен ортаның жылу сыйымдылығына байланысты өзгереді;
- қоршаған ортаға сыртқы және ішкі жылу көздері әсер етеді;
- қарастырылатын заттың әрбір фазасындағы энергияның берілуі жылу теңдеуі арқылы сипатталады;
- еркін шекара деп аталатын фазалық ауысу шекарасының тұрпаты ортаның бір агрегаттық күйден екіншісіне өтуі кезіндегі энергетикалық балансты білдіретін Стефан шартымен сипатталады;
- Стефан шартынан басқа еркін шекарада еркін шекараны құрайтын зат бөлшектерінің температурасы белгілі тұрақты деп саналатын фазалық ауысу температурасына тең болатын шарт қойылады;

Соңғы шарты аксиома сипатына ие, өйткені ол термодинамиканың негізгі заңдарынан шықпайды, бірақ көптеген нақты процестерді өте дәл көрсетеді.

Кері шекаралық есептер әдісін фильтрация есептеулерінде қолдану әртүрлі гидрогеологиялық жағдайларда (гетерогенді және анизотропты су қоймалары, дренаждық негіздер, жарықшалар және т.б.) салынған бөгеттерді жобалау бағдарламасымен байланысты болды және негізгі талаптардың бірі жергілікті және толық фильтрациялық тұрақтылық болды.

Сызықты емес теңдеулер теориясында шенелмеген (қирайтын) шешімдерді зерттеу ерекше орын алады, немесе басқаша айтқанда, күшейтілген режимдер (физикалық термин). Шенелмеген шешімдерді қабылдайтын сызықты емес эволюциялық есептер глобалді (уақыт бойынша) шешілмейді: шешімдер ақырлы уақыт аралығында шексіз артады.

Параболалық теңдеулер үшін шекаралық есептерді зерттеу дербес дифференциалдық теңдеулер теориясындағы классикалық есептердің бірі болып табылады және математиктерді үнемі қызықтырады. Мұның себебі, бір жағынан, параболалық теңдеулердің ерекше практикалық маңыздылығында болса, екінші жағынан, оларды зерттеу математиканың әртүрлі салаларының: қатарлар мен интегралдар теориясының дамуымен байланысты, функционалдық талдау, жуықтау теориясы, ықтималдықтар теориясы және кездейсоқ процестер. Қазіргі жаратылыстанудағы, экономикадағы және техникадағы көптеген күрделі құбылыстардың математикалық сипаттамасы параболалық теңдеулер мен теңдеулер жүйесіне әкеледі. Жылуөткізгіштік пен диффузияның классикалық мәселелерінен басқа параболалық теңдеулер мен жүйелер, мысалы, кептіру және салқындату процестерін сипаттау кезінде жылу және масса алмасу теориясында, процесті зерттегенде ядролық тізбекті реакциялар теориясында кездеседі. Кездейсоқ процестің макроскопиялық сипаттамасында сигналдар теориясында радиотехникалық құрылғының шығуы, химиялық және биологиялық кинетикадағы көптеген процестерді зерттеуде және басқа мәселелерде. Параболалық типті екінші ретті дифференциалдық теңдеу үшін біркелкі емес коэффициенттері бар шекаралық есептер классикалық зерттеу объектілерінің бірі болып табылады. Мұндай мәселелердің теориясы, мысалы, О.А. Ладыженская монографиясында бар.

Коши-Ковалевская типті теңдеулер болып табылмайтын теңдеулердің есептері үшін алғашқы қатаң математикалық зерттеулер С.Л.Соболевтің [11] алғашқы жұмысы болып табылады. Дәл осы жұмыс Соболевтің 2 типті теңдеулері деп аталатын классикалық емес теңдеулерді зерттеуге үлкен қызығушылық тудырды. Псевдопараболалық типтегі есептерді зерттеу 1970 жылдардың аяғында басталды. Псевдопараболалық типті сызықты емес теңдеулерді зерттеу үшін көптеген ғылыми жұмыстар [13]– [48] арналған. Соболев типтегі теңдеулерге және, атап айтқанда, псевдопараболалық типтегі теңдеулерге әкелетін физикалық процестерді модельдеу үшін көптеген [13], [14], [16], [17], [25]–[30], [24], [87]-[91] жұмыстар арналған.

Үлкен уақыттағы мұндай есептерді шешудің асимптотикалық бағыты, сондай-ақ Бенджамин-Бон-Махони және Бенджамин-Бон-Махони-Бюргер, Розенау-Бюргер типті бір өлшемді және көп өлшемді теңдеулері үшін жалғыз толқын типті шешімдердің орнықтылығы және шашырау теориясы туралы мәселелер қарастырылды [15] - [17]. Осколков А. П., Антонцев А. Н., Кожанов А. И., Свешникова.И., Корпусов М. О., Хомпыш Х. және басқа да көптеген ғалымдар псевдопараболалық типтегі теңдеулер үшін қойылған бастапқы-шеттік есептердің шешімділігін зерттеуде айтарлықтай үлес қосты.

Соболев типті сызықтық емес теңдеулер жүйесі (Кельвин-Войгт теңдеулері) тұтқыр серпімді сұйықтықтардың ағысын сипаттайды. Мұндай теңдеулердің математикалық қисындылығын зерттеуге келесі [25]– [27], [43]–[48] жұмыстар арналған.

М. О. Корпусовтың және А. Г. Свешниковтың [32] жұмысында кристалды жартылайөткізгіштіктегі электр өткізгіштігі өріске локалді емес тәуелді болған жағдайдағы бастапқы қираудың релаксациясын сипаттайтын модельді теңдеу зерттелген.

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Delta \mathrm{u}-\mathrm{u})+\left(\int_{\Omega} dx|\nabla u|^2\right)^q \Delta u=0, q>-\frac{1}{2},$$
$$u|_{\partial\Omega}=0, u(x,0)=u_0(x).$$

Кейбір бастапқы параметрлер үшін «салқындату» әсері ақырлы уақытта орын алатыны дәлелденді. Ақырлы уақытта шешімнің қирауы үшін жеткілікті шарттар алынған. Үлкен уақыттағы асимптотиканың бірінші мүшесі табылып, асимптотиканың қалған мүшесінің бағасы алынды.

М.О.Корпусовтың және А.Г.Свешниковтың [31] еңбегінде диссипация және электр өрісінің кернеулігімен бірге тоқ тығыздығының локалді емес байланысын ескере отырып сыртқы электр өрісіндегі жартылай өткізгіштердегі толқындық процестердің математикалық моделі зерттелді:

$$\frac{\partial}{\partial \mathrm{t}}(\Delta u - u - |u|^q u) + \Delta u + u_{x_1} + u u_{x_1} - \left(\int_\Omega \, dx \nabla u\right)^q \Delta u = 0,$$
$$u|_{\partial\Omega} = 0, u(x,0) = u_0(x).$$

Қатаң жалпылама шешімнің қирауының жеткілікті шарттары алынды. Бұл жұмыс уақыт бойынша локалді және глобалді шешілу мәселелеріне және сызықты емес Соболев типті теңдеулер үшін қойылған бастапқы-шеттік есептің шешімдерінің соңғы уақытында қирау әсерін зерттеуге арналған.

Қос сызықты емес параболалық теңдеулердің жалпыланған шешімдерінің бар болуы мәселесі бойынша [51]–[60] жұмыстары арналған. Қосарлы сызықты емес параболалық теңдеулер үшін қойылған бастапқы-шеттік есептің жалпылама шешімінің бар екенін алғаш дәлелдеген П.А.Равиарттың [52] жұмысын атап өтемін.

Ф. Х. Мукминова мен Е. Р. Андрияннованың [56]-шы жұмысында қосарлы сызықты емес параболалық теңдеудің алғашқы аралас есебі қарастырылды

$$(|u|^{\alpha-2}u)_t + A(u) = f(t,x), \alpha > 1, (t,x) \in D;$$
$$u(t,x)|_s = 0, S = \{t > 0\} \times \partial\Omega;$$
$$u(0,x) = u_0(x), u_0(x) \in L_\alpha(\Omega),$$

мұндағы

$$A(u) = -\sum_{i=1}^{\infty} \left(\left|u_{x_i}\right|^{p-2} u_{x_i}\right)_{x_i}, \; p > 1.$$

Шексіз аймақта қосарлы сызықты емес параболалық теңдеудің уақыт бойынша глобалді күшті шешімінің бар болуы Галеркиннің жуықтау әдісімен дәлелденді. Бұл теңдеу шешімдерінің нормасының кему жылдамдығы үшін төменгі шек алынады.

Төмендегі түрде берілген шешімдердің қирауының есептері:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(u + \sum_{k=1}^n a_k(x)|u|^{p_{k-2}}u\right) - \Delta(|u|^{q_1}u) = |u|^{q_2}u,$$
$$\frac{\partial}{\partial t}\left(u + \sum_{k=1}^n a_k(x)|u|^{p_{k-2}}u\right) - div(h(x,|\nabla u|)\nabla u) + g(x,u) = f(x,u),$$

мұндағы $h(x,|\nabla u|)$, $g(x,u)$, $f(x,u)$ функцияларының сызықты емес шарттары бар ([57] қараңыз), көптеген жұмыстарда зерттелген [57]–[61]. [57], [58] жұмыстарында Левиннің түрлендіру әдісі бойынша оның шешімі шектелген аймақта ақырлы уақыт ішінде қирауы үшін жеткілікті шарттар алынды.

Соңғы және артығымен анықталған интегралдық сызықтық және сызықтық емес теңдеулердің көзін анықтау есептерін бірқатар авторлар [62]–[70] әртүрлі әдістермен қарастырған.

[69]-шы жұмыста параболалық теңдеу үшін қойылған дәрежелік сызықты емес кері есебі төмендегі түрде қарастырылған:

$$
\begin{gathered}
u_t - \Delta u - |u|^p u + b(x,t,u,\nabla u) = F(t)\omega(x), x \in \Omega, t > 0, \;\; p > 0, \\
u(x,0) = u_0(x), x \in \Omega, t > 0, \\
u|_{\partial\Omega\times(0,\infty)} = 0, \\
\int_\Omega u \cdot \omega \, dx = 1, \qquad t > 0.
\end{gathered}
$$

Бұл жұмыста кері есептің шешімдерінің глобалді болмауына кепілдік беретін белгілі деректер бойынша шарттар алынды. Сонымен қатар, шенелген аймақта дәрежелік сызықты еместігіне қарама-қарсы таңбалы кері есеп үшін шешімнің орнықтылығы бекітілді.

[70]-шы жұмыста дәрежелік сызықты емес квазисызықты параболалық теңдеу үшін қойылған кері есебі қарастырылады:

$$
\begin{gathered}
u_t - div\big((k_1 + k_2|\nabla u|^{\mathrm{m}-2})\nabla u\big) + h(u,\nabla u) - |u|^{p-2}u = F(t)\omega(x), x \in \Omega, t > 0, \\
u(x,t) = 0, x \in \partial\Omega, t > 0, \\
u(x,0) = u_0, x \in \Omega \\
\int_\Omega u(x,t) \cdot \omega(x) \, dx = 1, t > 0. \; p > m \geq 2
\end{gathered}
$$

(2), (3) бастапқы-шеттік шарттарымен және (4) қосымша интегралдық шартымен бірге ($t > 0$ кезіндегі $\varphi(t) = 1$ функциясы болғанда). Бұл есептің шешімінің ақырғы уақытта қирауы үшін шарттар алынды.

П.А. Макаровтың [68] жұмысында Нейманның сызықты емес шекаралық шарты бар псевдопараболалық типті сызықты емес теңдеу үшін қойылған бастапқы-шеттік есеп қарастырылған. Шешімнің бар екендігі туралы локалді теорема дәлелденген. Энергетикалық теңсіздіктер әдісін қолданып, ақырлы уақыт аралығында шешімнің қирауы үшін жеткілікті шарттар және қирау уақытының жоғарғы және төменгі бағалаулары алынған.

$$
\begin{cases}
\frac{\partial}{\partial t}(\Delta u - u - |u|^{q_3}u) + \Delta u + |u|^{q_2}u = 0, \\
\left(\frac{\partial u}{\partial n} + |u|^{q_1}u\right)\Big|_\Gamma = 0 \\
u(x,0) = u_0(x), \; x = (x_1, x_2, \dots x_N) \in \Omega \in R^N, q_i > 0, i = 1,2,3.
\end{cases}
$$

Сонымен қатар, жарықшағы бар фильтрация процесін модельдеудегі А.Ш. Любанованың фильтрация теңдеуінің коэффициентті кері есебін атап өтсе болады. Қосымша интегралдық шарты бар есептер М. Яман, Х.Хомпыш, А.И. Кожанов, Г.В. Намсараева, Я.Т. Мегралиев жұыстарында қарастырылған.

[68]-ші жұмыста стандартты емес өсу шарты бар параболалық теңдеудің оң жағын анықтауға берілген кері есебі зерттелген. Бұл есептің шешімінің бар болуы мен жалғыздығы дәлелденген. Ақырылы уақыт ішінде шешімнің жойылуы және қирауы үшін жеткілікті шарттар алынған. Уақыттың үлкен мәндері үшін кері есептің шешімдерінің асимптотикалық әрекеті зерттелген.

Баренблатт Г.И., Желтов Ю.П., Конина И.Н. [13]-ші жұмысында жарылған жыныстардағы біртекті сұйықтың қозғалыс теңдеулерінен, Дарси заңы, массаның сақталу заңы және күй теңдеуінен псевдопараболалық теңдеу моделін қорытып шығарады.

Математикалық физиканың дифференциалдық теңдеулеріне арналған тура және кері есептер қазіргі уақытта жаратылыстану ғылымдарында және олардың қолдануларында үлкен рөл атқарады. Кері есептерді қарқынды зерттеу, негізінен, бақылауларды өңдеуге және түсіндіруге байланысты маңызды қолданбалы міндеттердің ауқымды есептерді шешудің математикалық әдістерін дамыту қажеттілігінен туындайды.

Жұмыстың мақсаты. Фильтрация теориясының тура және кері есептерін шешімділікке зерттеу. Атап айтқанда:

- Стефан типті есептің математикалық моделінің қисындылығын, шешімнің бар болуының, жалғыздығын, релаксация уақыты бойынша шекке көшуін зерттеу.
- Сызықтық емес шекаралық шартымен берілген квазисызықты псевдопараболалық теңдеу үшін қойылған бастапқы-шеттік есептердің бірмәнді шешімділікке зерттеу. Есептердің әлсіз жалпыланған шешімінің бар болуы және жалғыздығы туралы теореманы дәлелдеу, сызықтық емес шекаралық шарты бар квазисызықты псевдопараболалық теңдеу үшін есептің шешімінің қирауын дәлелдеу және уақыт бойынша шешімнің асимптотикалық тұрпатын зерттеу.
- Квазисызықты параболалық теңдеу үшін қойылған кері есептің әлсіз шешімін табу, шешімнің орнықтылығын зерттеу, сонымен қатар шешімнің ақырлы уақытта қирауын дәлелдеу.
- Сызықты емес айқас-диффузиясы бар бәсекелестік жүйенің бір фазалы және екі фазалы паттерндар үшін құрылған шешімдерін табу теоремасын дәлелдеу. Шешімдердің нақты аймақтарын табу.

Зерттеу мақсаттары.

-Фазалық релаксациясы бар математикалық моделді қанағаттандыратын $c(x,t)$, $s(x,t)$ (сұйық және қатты фазалардағы ББЗ концентрациясы) функцияларын табу

- Модельдің қисындылығын тексеру
- Шешімнің бар болуын дәлелдеу
- Шешімнің жалғыздығын дәлелдеу
- Сандық тәжірибелер келтіру

-Шенелген аймақтағы псевдопараболалық теңдеу үшін қойылған бастапқы-шеттік есебін уақыт бойынша локальді және глобальді шешімділікке зерттеу

-Шешімдердің ақырлы уақытта қирау әсерін зерттеу

-Әлсіз шешімінің бар екендігін Галеркин әдісімен дәлелдеу

-Әлсіз жалпыланған шешімнің жалғыздығын дәлелдеу

-Шешімнің ақырлы уақытта қирау әсерін зерттеу

-Уақыт бойынша шешімнің экспоненциалды кемуін зерттеу

-Қайта анықтау арқылы берілген интегралдық шарты бар дәрежесіне қатысты сызықты емес екінші ретті квазисызықты параболалық типті кері есебін қанағаттандыратын $(u(x,t), f(t))$ функциялар жұбын анықтау

- Кері есептің әлсіз шешімінің бар болуын Галеркин әдісімен дәлелдеу

-Біртекті Дирихле шарты бар шенелген аймақта шешімнің ақырлы уақытта қирауы үшін жеткілікті шарттар алу

-Дәрежелік типіне қатысты сызықты емес қарама-қарсы таңбалы кері есептің шешімінің тұрақтылығын алу

-Сызықты емес айқас диффузиялы бәсекелестік жүйенің кейбір параметрлер диапазоны үшін периодты стационарлық шешімдердің екі түрлі түрі бар екенін көрсету

-Бұл жүйенің бір фазалы және екі фазалы паттерндар үшін құрылған шешімдерін табу теоремасын дәлелдеу.

-Сегіз өлшемді параметр кеңістігін бөліктерге бөлу

-Шешімдердің Тьюринг аймақтарын көрсету

-Аналитикалық әдістермен қатар шешімдердің қасиеттерін зерттеудегі сандық әдістерін ұсыну.

Зерттеу объектісі фильтрация теориясының тура және кері есептерін жуықтап шешу әдістері болып табылады.

Зерттеу әдістері. Зерттеу нәтижелеріне қол жеткізу барысында Галеркиннің жуықтау әдісі, априорлық бағалау әдісі, Соболев кеңістігінің теориясы, интегралдық және дифференциалдық есептеу әдістері, функционалдық талдау әдісі, компактілік әдісі, монотондылық әдісі, қажетті интерполяциялық теңсіздіктер, Юнг, Гелдер және Минковский теңсіздіктері қолданылды.

Ғылыми жаңалығы. Диссертацияда алынған барлық нәтижелер жаңа және қатаң дәлелі бар. Алынған нәтижелердің теориялық және практикалық маңызы бар және оларды тура және кері есептердің жалпы теориясын құруда пайдалануға болады.

-Фазалық релаксациясы бар Стефан типті фильтрация теориясының бір моделінің шешімінің бар болуы, жалғыздығы алынды. Релаксация уақыты бойынша шекке көшу леммасы дәлелденді. Сандық тәжірибелер ұсынылды.

-Нейман-Дирихле типті сызықты емес шекаралық шарты бар псевдопараболалық типті квазисызықты теңдеу үшін қойылған бастапқы-шеттік есептің жалпыланған әлсіз шешімінің бар болу және жалғыздығы туралы теоремасы дәлелденді. Сонымен қатар, шешімдерінің ақырлы уақытта қирауы үшін жеткілікті шарттар алынды.

-Қайта анықтау арқылы берілген интегралдық шарты бар квазисызықты параболалық типті теңдеуге қойылған кері есебінің әлсіз шешімінің бар болуы Галеркин әдісімен дәлелденді және шешімнің тұрақтылығы алынды.

-Сызықты емес айқас диффузиялы бәсекелестік жүйенің кейбір параметрлер диапазоны үшін периодты стационарлық шешімдердің екі түрлі түрі бар екенін көрсетілді. Сегіз өлшемді параметр кеңістігін бөліктерге бөліп және шешімдердің Тьюринг аймақтары көрсетілді. Аналитикалық әдістермен қатар шешімдердің қасиеттерін зерттеудегі сандық әдістері ұсынылды.

Алынған нәтижелердің теориялық және практикалық маңыздылығы. Алынған нәтижелер теориялық және практикалық маңызға ие және алынған нәтижелер ең алдымен теориялық қызығушылық тудырады. Зерттеудің қол жеткізілген нәтижелері үшін есептеу эксперименттерін жүргізуге және шешімдердің сандық мәндерін алуға болады.

Алынған нәтижелерді аппробациялау. Жұмыс нәтижелері бойынша
-«The 5th Abu Dhabi University Annual International Conference Mathematical Science and Its Applications» конференциясында (Абу-Даби, 20-22 сәуір, 2017),
-«The 6th Abu Dhabi University Annual International Conference Mathematical Science and Its Applications» конференциясында (Абу-Даби, 19-21 желтоқсан, 2017),
-«The 7th Abu Dhabi University Annual International Conference Mathematical Science and Its Applications» конференциясында (Абу-Даби, 09-12 мамыр, 2018),
-«Дифференциалдық теңдеулер, анализ және алгебра мәселелері» атты VIII халықаралық ғылыми конференциясында (Ақтөбе қ., 1 қараша, 2018 ж.),
-«Анализдің, дифференциалдық теңдеулердің және алгебраның өзекті мәселелері» атты ғылыми конференциясында (Астана, 16-19 қараша, 2019),
-Академик Надиров Н.К. 90 жылдығына және академик Өтелбаев М.О. 80 жастық мерейтойына арналған «Computational and Information Technologies in Science, Engineering and Education (CITech-2022)» атты халықаралық конференциясында (Алматы қ., 12-15 қазан, 2022 ж.),
-«Жаратылыстану ғылымындағы кері және қисынсыз қойылған есептері» атты халықаралық ғылыми конференциясында (Алматы қ., 11-12 сәуір, 2023 ж.) баяндама жасалды.

Диссертацияның негізгі нәтижелері әл-Фараби атындағы Қазақ Ұлттық Университетінің «Математика» кафедрасының №13 (11.04.2023) ғылыми семинарында д.ф.-м.н., проф. С.Т.Мухамбетжанов пен к.ф.-м.н., доц. С.Е. Айтжановтың жетекшілігімен баяндалып, талқыланды.

Ғылыми ережелердің, қорытындылар мен нәтижелердің сенімділігі мен негізділігі белгілі ғалымдардың бұрын алынған нәтижелері негізінде жүргізілген зерттеу жұмысында келтірілген егжей-тегжейлі дәлелдемелер арқылы, индекстелетін халықаралық журналдардағы жарияланымдармен, сондай-ақ ғылыми қызметтің негізгі нәтижелерін жариялау үшін Қазақстан Республикасы Ғылым және жоғары білім министрлігінің Білім және ғылым саласындағы бақылау комитеті ұсынған жарияланымдармен расталады, сондай-ақ конференция материалдарында расталады.

Жарияланымдар. Диссертациялық зерттеу нәтижелері бойынша 12 жұмыс жарияланды, оның ішінде:
–Clarivate Analytics Journal Citation Reports бойынша сәйкес төртінші және бірінші квартильдерге (Q4 және Q1) енгізілген және/немесе Scopus дерекқорында CiteScore пайыздық көрсеткіштері сәйкесінше 35, 91, 96 болатын ғылыми журналдардағы 3 мақала.
–ҚР БҒМ Білім және ғылым саласында сапаны қамтамасыз ету комитеті ұсынған журналдарда 3 мақала.
– халықаралық конференциялар жинағында 6 жарияланым.

Диссертацияның құрылымы. Диссертация кіріспеден, 5 бөлімнен (әр бөлім бөлімшелерге бөлінген), қорытындыдан және пайдаланылған әдебиеттер тізімінен тұрады. Жұмыста 8 сурет бар. Диссертацияның көлемі 105 бет.

Диссертацияның негізгі мазмұны.

Ұсынылған диссертацияның кіріспесінде жұмыстың өзектілігі мен жаңалығы берілген, жұмыстың мақсаты тұжырымдалды, негізгі ережелері белгіленіп, сонымен қатар диссертацияның қысқаша мазмұны берілген.

Бірінші тарауда қажетті белгілеулер енгізіліп, қажетті анықтамалар, белгілі леммалар, теоремалар, негізгі теңсіздіктер келтіріледі.

Екінші тарауда фазалық ауысуды ескеретін фильтрация теориясының математикалық моделі қарастырылған:

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{1}{\tau}(H(c) - s),$$
$$m \cdot \frac{\partial c}{\partial t} = D \cdot \Delta c - v \cdot \nabla c - \frac{\partial s}{\partial t}.$$

Фазалық релаксациясы бар бұл математикалық моделді қанағаттандыратын $c(x,t)$, $s(x,t)$ (сұйық және қатты фазалардағы ББЗ концентрациясы) функцияларын табу қарастырылған. Бұл моделдің қисындылығын

$$t' = \frac{t}{\tau}, \quad x' = x\sqrt{m/\tau D}, \quad s' = s, \quad c' = cm, \;\; H(c) = H'(mc)$$

алмастыруы арқылы тексерілді. Шешімнің бар болуы мен жалғыздығы дәлелденді. Сандық тәжірибелер келтірілді.

Тепе-теңдік процестері үшін жарамды температураға тәуелділік берілген. Яғни, температура мен ылғалдылық өзгерген кезде H бірден жаңа температураға сәйкес жаңа мән алады. Сонымен қатар, нақты процестерде сұйықтық пен топырақтағы қатпайтын су арасындағы тепе-теңдікке жету үшін шектеулі уақыт қажет. Газды-сұйықтықты тазартатын қоспалармен бұрғылау тәжірибесінде көптеген жағдайларда беттік-белсенді заттардың (ББЗ) қоспалары сәтті қолданылады. Мұнай және газ кен орындарын игеру үшін ББЗ қолданғанда жекелеген фазалардың шекараларындағы қабаттарда сорбциялық процестер орын алады (ББЗ мен майлар, немесе ББЗ мен топырақ). Нақты процестерде фазалардың арасындағы тепе-теңдікті қамтамасыз ету үшін ақырлы уақыт қажет. Сондықтан қарастырылып отырған математикалық модель фазалық релаксация математикалық моделі деп атайды. Математикалық модельдің шешілімділігі және релаксациялық уақыт бойынша шекке өтуі зерттелді. Шектік жағдайда бастапқы есеп Стефан типіндегі есеп екендігі дәлелденді. Көптеген фазалық өтпелі процестерде сұйық фаза түріндегі гидродинамикалық ағын болады. Мұндай құбылыстарды зерттеуге деген қызығушылық көптеген технологиялық қосымшаларға негізделген.

Үшінші тарауда шекарасы жеткілікті тегіс шенелген аймақтағы псевдопараболалық теңдеу үшін қойылған бастапқы-шеттік есебінің шешімділігін зерттеудің іргелі мәселесіне арналған:

$$\frac{\partial}{\partial t}(u-\chi\Delta u)-\left(a_0+a_1\|\nabla u\|_{2,\Omega}^{2q-2}\right)\Delta u=b(x,t)|u|^{p-2}u+f(x,t)\ (x,t)\in Q_T,$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}+k(x,t)|u|^{\sigma-2}u|_{\Gamma}=0,\qquad \Gamma=\partial\Omega\times(0,T),$$

$$u(x,0)=u_0(x), x\in\Omega,$$

мұндағы $Q_t=\{(x,t): x\in\Omega, \Omega\subset R^n, 0<t<T\}$ цилиндр, $\Omega\subset R^n, n\geq 3$ шенелген аймақ, $\partial\Omega$ жеткілікті тегіс шекара, сонымен қатар p, q, a_0, a_1 және σ оң тұрақты сандар. $b(x,t)$, $f(x,t)$, $k(x,t)$ функциялары және $u_0(x)$ келесі шарттарды қанағаттандырады:

$$0<b_0\leq b(x,t)\leq b_1<\infty, 0<b_t(x,t)\leq b_1<\infty, \forall(x,t)\in Q_T;$$

$$0<k_0\leq k(x,t)\leq k_1<\infty, 0\leq\frac{k_t(x,t)}{k(x,t)}\leq K_1, \frac{|k_{tt}(x,t)|}{k(x,t)}\leq K_2, \forall(x,t)\in Q_T;$$

$$\|f(x,t)\|_{2,\Omega}^2\leq C_0, \forall t\in[0,T], u_0(x)\in W_2^1(\Omega).$$

Көптеген жуықтау әдістері шекаралық шарттары ізделінді функцияларға және оның туындыларына қатысты сызықты болатын есептердегі меншікті мәндер мен меншікті функцияларды табу үшін қолайлы. Осы әдістердің ішінде Галеркин әдісі ең қарапайым есептеулерге әкеледі. Бұл тарауда Галеркин әдісі арқылы шенелген аймақтағы псевдопараболалық теңдеу үшін қойылған бастапқы-шеттік есептің әлсіз шешімінің бар екендігі дәлелденді. Галеркиннің жуықтауын қолдану шешімнің бар болуының уақытын бағалауға мүмкіндік береді. Соболевтің енгізу теоремаларын қолдану шешімнің априорлы бағалауларын алуға мүмкіндік береді. Априорлық бағалаулар негізінде квазисызықты псевдопараболалық теңдеу үшін қойылған бастапқы-шеттік есептің жалпылама әлсіз шешімінің бар болуы және жалғыздығы туралы локалді теоремасы дәлелденген. Сызықтық емес теңдеулер теориясында шексіз шешімдерді немесе басқаша айтқанда, күшею режимдерін зерттеу ерекше орын алады. Шексіз шешімдерді қабылдайтын сызықты емес эволюциялық есептер глобалді деңгейде шешілмейді: шешімдері ақырлы уақыт аралығында шексіз көбейеді. Бұл тарауда шектеулі аймақтағы сызықтық емес шекаралық шартымен берілген

Нейман-Дирихле есебінің шешімдерінің ақырлы уақытта қирауы үшін жеткілікті шарттар алынған.

Төртінші тарауда $Q_T = \{(x,t) : x \in \Omega, \quad t \in (0,T)\}$ цилиндрінде қайта анықтау арқылы берілген интегралдық шарты бар дәрежесіне қатысты сызықты емес параболалық типті теңдеуге қойылған кері есебі қарастырылады:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(u + a_0|u|^{p-2}u\right) - \Delta u + a(x,t,u,\nabla u)\big) = |u|^{p-2}u + f(t)w(x),$$
$$x \in \Omega, \quad 0 < t < T$$

$$u(x,0) = u_0(x),$$

$$u|_{\partial\Omega\times(0,T)} = 0,$$

$$\int_\Omega (u + a_0\, |u|^{p-2}u)\omega\, dx = \varphi(t), \qquad 0 < t < T,$$

мұндағы $\Omega \subset R^n, n \geq 1$ шенелген аймақ, $\partial\Omega$ шекарасы жеткілікті жатық, p және a_0 оң тұрақтылар, мұндағы $p \geq 2$. $\varphi(t)$ кейбір N_0, N_1 және N_2 нақты тұрақтылары үшін $0 < N_0 < \varphi(t) < N_1$ және $0 < N_0 < \varphi'(t) < N_2$ болатындай дифференциалданатын функция. $\omega(x), a(x,t,u,\nabla u)$ және $u_0(x)$ функциялары төмендегі шарттарды қанағаттандырады:

$$\int_\Omega \omega^2(x)\, dx = 1, \ \omega \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) L_p(\Omega) \cap L_{\frac{p}{p-2}}(\Omega) \cap L_2(\Omega), p \geq 2,$$

$$\int_\Omega u_0 \cdot \omega\, dx = \varphi(0), \ u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap L_p(\Omega) \cap L_2(\Omega), p \geq 2.$$

және $a_1 > 0, a_2 > 0$ тұрақтылары үшін келесі теңсіздік орынды:

$$|a(x,t,u,\nabla u)| \leq a_1|\nabla u| + a_2|u|^{\frac{p}{2}}.$$

Бұл екінші ретті квазисызықты параболалық типті кері есебін қанағаттандыратын $(u(x,t), f(t))$ функциялар жұбын анықтау қарастырылады. Кері есептің әлсіз шешімінің бар болуы Галеркин әдісімен дәлелденген. Біртекті Дирихле шарты бар шенелген аймақта шешімнің ақырлы уақытта қирауы үшін жеткілікті шарттар алынды, сонымен қатар, дәрежелік типіне қатысты сызықты емес қарама-қарсы таңбалы кері есептің шешімінің тұрақтылығы алынды.

Бесінші тарауда сызықты емес кросс-диффузиясы бар бәсекелестік жүйесін қарастырылады:

$$\begin{cases} u_t = (uu_x + \varepsilon_1 uv_x + \varepsilon_3 vu_x)_x + u(1 - u - cv) := -\frac{\partial}{\partial x} J_1 + u(1 - u - cv), \\ v_t = (dvv_x + \varepsilon_4 uv_x + \varepsilon_2 vu_x)_x + v(a - bu - v) := -\frac{\partial}{\partial x} J_2 + v(a - bu - v). \end{cases}$$

Екі түрлі реакция-диффузия (РД) жүйесі қарастырылған. Бұл тарауда қарастыратыным кросс-диффузия деп аталатын механизм мен әсерге қосымша жарық түсіру болып табылады. Екі “ағындар” екі белгісіз шешімдердің градиенттерін қамтиды. Кейбір параметрлер диапазоны үшін периодты стационарлық шешімдердің екі түрлі түрі бар екенін көрсетілген. Оларды пайдалана отырып, (сегіз өлшемді) параметр кеңістігін бөліктерге бөліп және шешімдері бар Тьюринг аймақтары көрсеттім. Бұл аймақтардың шекаралары «бифуркация нүктесіне» ұқсас «бифуркациялық беттер» деп аталады. Әдеттегідей, бұл шешімдер шектеледі, өйткені сәйкес эволюциялық жүйенің шешімдерінде t шексіздікке барады. Мұнда, сондай-ақ шешімдердің бастапқы функциялар кеңістігінде үлкен тартылыс облысы бар аттракторлар (тартушылар) екендігін орынды ететін кейбір сандық есептеулер келтірілген.

Автор ғылыми кеңесшілерге – физика-математика ғылымдарының докторы, профессор С.Т. Мухамбетжановқа, физика-математика ғылымдарының кандидаты, доцент С.Е. Айтжановқа, физика-математика ғылымдарының докторы, профессор Роберт Кершнерге диссертациялық жұмысты орындауда құнды кеңестері мен жан-жақты көмегі үшін шынайы алғысын білдіреді.

1 БЕЛГІЛІ КЕҢІСТІКТЕРДІҢ АНЫҚТАМАЛАРЫ, НЕГІЗГІ ЛЕММАЛАР МЕН ТЕҢСІЗДІКТЕР

Анықтама 1. E қайсыбір бос емес жиын болсын. Егер $\forall\, x, y \in E$ үшін нақты мәнді функциялар $\rho : E \to R_+$ анықталып:

1) $\rho(x,y) \geq 0$ және $\rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (тепе-теңдік аесиомасы),
2) $\rho(x,y) = \rho(y,x)$ (симметриялық аксиомасы),
3) $\forall\, x, y, z \in E,\ \rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(z,y)$ (үшбұрыш аксиомасы)

шарттары орындалса, онда ол функцияны (шындығында функционал) E жиынидағы метрика немесе ара қашықтық деп атайды.

Анықтама 2. Бос емес E жиыны мен осы жиында анықталған (E, ρ) жұбын метрикалық кеңістік деп атайды.

Анықтама 3. X сызықтық кеңістігінің әрбір элементіне теріс емес нақты санды сәйкес қоятын сандық функцияны норма деп атайды және оны $\|\cdot\|$ деп белгілейді, сонымен қатар ол төмендегідей шарттарды (аксиомаларды) қанағаттандырса:

1) $\|x\| \geq 0$ және $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|, \forall \lambda \in C,\ \forall\, x \in X$,
3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|,\ \forall\, x, y \in X$

Норма амалы енгізілген сызықтық кеңістікті нормаланған кеңістік деп атайды.

Кез келген нормаланган кеңістік метрикалық кеңістік болады. Бірақ кері тұжырым дұрыс емес, өйткені кез-келген метрикалық кеңістік сызықты кеңістік бола бермейді.

Анықтама 4. Егер $\mathcal{L}$ нормаланған кеңістігінің элементтерінен тұратын кез-келген $\{x_n\}$ фундаментальді тізбегі осы кеңістіктің қандай да бір элементіне норма бойынша жинақталатын болса, онда $\mathcal{L}$ нормаланган кеңістігін толық нормаланган кеңістік деп атайды.

Анықтама 5. $\mathcal{L}$ толық нормаланган кеңістігі Банах кеңістігі деп аталады және оны $\mathfrak{B}$ деп белгілейді.

Анықтама 6. Егер E метрикалық кеңістігінің кез-келген a нүктесі X жиыны үшін ішкі немесе шекаралық нүкте болатын болса, яғни

$$E = X \cup \partial X$$

онда X жиыны E метрикалық кеңістігіне барлық жерде тығыз орналасқан жиын деп аталады.

Анықтама 7. Егер E метрикалық кеңістігіне барлық жерде тығыз ішкі саналымды жиын табылатын болса, онда E метрикалық кеңсітігін сепарабельді метрикалық кеңсітік деп атайды.

Анықтама 8. E метрикалық кеңістігін сепарабельді кеңістік деп атайды, егер де E метрикалық кеңістігінен тізбекшесі E метрикалық кеңістігінің x

элементіне жинақталатын $\{x_n\}$ тізбегі табылатын болса, яғни:

$$(\exists\{x_n\} \subset E)(\forall\, x \in E): \lim_{n\to+\infty} x_{k_n} = x.$$

Анықтама 9. $L_p(\Omega), 1 \leq p < \infty$ деп Ω аймақта p дәрежесімен бірге интегралданатын (өлшенетін)

$$\|u(x)\|_{L_p(\Omega)} = \|u(x)\|_{p,\Omega} = \left(\int\limits_{\Omega} |u(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

норма бойынша анықталатын функциялар жиынын айтамыз.

Анықтама 10. (Соболев кеңістігі**)** Теріс емес бүтін k және $p \geq 1$ үшін

$$W_p^k(\Omega) = \{u(x)\epsilon L^p(\Omega): D^\alpha u(x)\epsilon L^p(\Omega), \forall\alpha, |\alpha| \leq k\}.$$

$Q \subset R^n$ аймағындағы $W_p^k(\Omega)$ Соболев кеңістігінде норма

$$\|u(x)\|_{k,p} = \sum_{|\alpha|\leq k} \|D^\alpha u(x)\|_p$$

түрінде болады.

Соболев кеңістігі дербес туындылы теңдеулер теориясы мен оларды шешудің сандық әдістері үшін ыңғайлы және табиғи математикалық құрал болып табылады.

Гроноулл леммасы. $u(t) \geq 0$ және $f(t) \geq 0$ болсын. Сонымен қатар, $u(t), f(t) \in \mathrm{C}[t_0, \infty]$ және барлық $t \geq t_0$ үшін келесі теңсіздік орындалсын:

$$u(t) \leq c + \int\limits_{t_0}^{t} f(t_1)u(t_1)dt_1$$

мұндағы c-оң тұрақты сан. Онда $t \geq t_0$ болғанда келесі бағалау орынды:

$$u(t) \leq c \cdot exp\left(\int\limits_{t_0}^{t} f(t_1)dt_1.\right)$$

Бихари леммасы Гроноулл леммасының ең қарапайым сызықты емес аналогы болып табылады.

Бихари леммасы. $x(t), f(t)$ функциялары $[a, b]$-да үзіліссіз және теріс емес болсын, сонымен қатар

$$x(t) \leq c + \int_a^t f(\tau)x^m(\tau)d\tau \text{ барлық } t \in [a, b) \text{ үшін,}$$

$$\int_a^t f(\tau)d\tau < \frac{1}{(m-1)c^{m-1}} \text{ барлық } t \in [a, b) \text{ үшін,}$$

мұндағы $m > 1, c > 0$ –қандай да бір тұрақтылар. Онда келесі теңсіздік орынды:

$$x(t) \leq c \cdot \left[1 - (m-1)c^{m-1} \int_a^t f(\tau)d\tau\right]^{\frac{1}{1-m}} \equiv \bar{x}(t) \text{ барлық } \quad t \in [a, b] \text{ үшін.}$$

Тұжырымдалған лемма және оның жалпылаулары көптеген қолданбаларға ие. Атап айтқанда, олар дифференциалдық теңдеулер теориясындағы шешімдердің бар екендігі мен жалғыздығын дәлелдеу, сызықты емес дифференциалдық теңдеулерді шешу үшін нақты нүктелік бағалауларды табу, оның ішінде дербес туындылы, шеттік есептердің басқарылуы, асимптотикалық тұрақтылық сияқты есептерді зерттеуде өте пайдалы болып шықты.

Лемма 1. ([39], [40]) Кез-келген $u(x) \in W\,_2^1(\Omega)$ функциясы үшін келесі интерполяциялық теңсіздіктер орындалады:

$$\|u\|_{p,\Omega}^p \leq C_0\left(\|\nabla u\|_{2,\Omega}^2 + \|u\|_{2,\Omega}^2\right)^{\frac{\theta p}{2}} \|u\|_{2,\Omega}^{(1-\theta)p} \leq$$

$$\leq C_0\left(\|\nabla u\|_{2,\Omega}^2 + \|u\|_{2,\Omega}^2\right)^{\frac{\theta p}{2}+\frac{(1-\theta)p}{2}} \leq C_1\left(\chi\|\nabla u\|_{2,\Omega}^2 + \|u\|_{2,\Omega}^2\right)^{\frac{p}{2}},$$

мұндағы $C_1 = max\left\{1; \frac{1}{\chi}\right\}\left(\frac{2(n-1)}{n-2}\right)^{\theta}, \theta = \frac{(p-2)n}{2p} < 1, 2 < \mathrm{p} < \frac{2n}{n-2}, n \geq 3.$

Лемма 2. ([71]) Оң, екі рет дифференциалданатын $\psi(t)$ функциясы $t \geq 0$ үшін келесі теңсіздікті қанағаттандырады делік:

$$\psi(t)\psi''(t) - (1+\alpha)(\psi'(t))^2 \geq -2C_1\psi(t)\psi'(t) - C_2\psi^2(t),$$

мұндағы $\alpha > 0, C_1, C_2 \geq 0$ және $C_1 + C_2 > 0$. Онда, егер $\psi(0) > 0$ және $\psi'(0) + \gamma_2\alpha^{-1}\psi(0) > 0$ онда $\psi(t)$ функциясы төмендегі түрде шексіздікке ұмтылады:

$$t \to t_2 \leq t_2 = \frac{1}{2\sqrt{C_1^2 + \alpha C_2}} \ln \frac{\gamma_1\psi(0) + \alpha\psi'(0)}{\gamma_2\psi(0) + \alpha\psi'(0)}$$

мұндағы

$$\gamma_1 = -C_1\sqrt{C_1^2 + \alpha C_2} \quad \text{және} \quad \gamma_2 = -C_1 - \sqrt{C_1^2 + \alpha C_2}.$$

Келесі белгілеулер қолданылады:
$\|u\| = \|u\|_{L_2(\Omega)}$, $\|u\|_{p,\Omega} = \|u\|_{L_p(\Omega)}$, мұндағы $L_2(\Omega)$ және $L_p(\Omega)$ Лебег кеңістігі, $(u, v) = \int_\Omega u \cdot v\, dx$ скаляр көбейтінді.

Теорема. ([39]) Кез-келген $u \in W_m^{(l)}(\Omega)$ функциялары үшін, мұндағы $m \geq$

1 және $r \geq 1$ сандары үшін келесі теңсіздік орынды:

$$\|u\|_{q,\Omega} \leq \beta \|u_x\|_{m,\Omega}^{\alpha} \|\nabla u\|_{r,\Omega}^{1-\alpha},$$

мұнда: $\alpha = \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{q}\right)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m} + \frac{1}{r}\right)^{-1}$.

Шаудер теоремасы. Егер Λ толығымен үзіліссіз операторы $\mathfrak{B}$ банах кеңісітігінің $\mathcal{K}$ шенелген тұйық дөнес жиының өзіне бейнелесе, онда $\Lambda u = u$ болатындай ең болмағанда бір $u \epsilon \mathcal{K}$ қозғалмайтын нүктесі бар болады.

Асколи-Арцелл теоремасы. $C(X)$ - $\|f\| = max|f(x)|$ нормасы бар X метрикалық кеңістігіндегі нақты үзіліссіз функциялардың нормаланған кеңістігі болсын. $C(X)$ –ң A ішкі жиыны предкомпакт болуы үшін келесі шарттарды қанағаттандыруы қажетті және жеткілікті:

1) A жиыны бірқалыпты шенелген, яғни кез келген f функциясы үшін $\exists C\, \forall f : |f(x)| \leq C$ орындалатындай барлығына арналған жалғыз C саны бар болады.

2) A жиыны бір дәрежелі үзіліссіз, яғни кез келген f функциясы үшін және кез келген екі x және y нүктелері үшін осы нүктелер арасындағы қашықтық δ –нан кіші болған кезде, f функциясының аргументтері арасындағы айырмашылық ε –нан кіші болатындай ε және δ сандары табылады: $\forall f \forall \varepsilon \exists \delta > 0 : |f(x) - f(y)| < \varepsilon$, егер $\rho(x,y) < \delta$.

Асколи теоремасы. Егер функционалды тізбек сегментте бірқалыпты шенелген және бір дәрежелі үзіліссіз болса, онда осы сегментте бірқалыпты жинақталатын тізбекше бөліп алуға болады.

Ладыженская теңсіздігі. Ω –R^n-гі Липшиц аймағы болсын және $u: \Omega \to \mathrm{R}$ із мағынасында Ω аймағында жойылатын әлсіз дифференциалданатын функция болсын (яғни u функциясы жатық функциялар тізбегінің $H^1(\Omega)$ Соболев кеңістігіндегі шегі болып табылады). Онда тек Ω-ға тәуелді C тұрақтысы табылады:

n=2 жағдайда:

$$\|u\|_{L^4} \leq C \|u\|_{L^2}^{1/2} \|\nabla u\|_2^{1/2},$$

n=3 жағдайда:

$$\|u\|_{L^4} \leq C \|u\|_{L^2}^{1/4} \|\nabla u\|_2^{3/4}.$$

Ладыженская теңсіздігінің екі өлшемді және үш өлшемді нұсқалары Гальярдо-Ниренберг интерполяциялық теңсіздігінің дербес жағдайлары болып табылады:

$$\|u\|_{L^p} \leq C \|u\|_{L^q}^{\propto} \|u\|_{H_0^s}^{1-\propto},$$

Және бұл теңсіздік $p > q \geq 1, s > n\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)$, және $\frac{1}{p} = \frac{\propto}{q} + (1-\propto)\left(\frac{1}{2} - \frac{s}{n}\right)$ жағдайындада әрдайым орындалады.

Юнг теңсіздігі.

$\forall\, a, b \in R'$ және $\forall q,\ q' > 1$ үшін

$$ab \leq \beta a^{q_1} + C(\beta, q_1) b^{q_1'},$$

орынды, мұндағы $\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_1'} = 1, \quad \beta > 0, \ \ C(\beta, q_1) = \frac{1}{q_1'(\beta q_1)^{\frac{q_1'}{q_1}}}$

Гелдер теңсіздігі.

$\forall\, f(x) \in L_p(\Omega),\ \mathrm{g}(x) \in L_{p'}(\Omega)$ функциялары үшін

$$\int\limits_{\Omega} |fg| dx \leq \|f\|_{L_p(\Omega)} \cdot \|g\|_{L_{p'}(\Omega)}, \qquad \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_1'} = 1$$

орынды.

2 СТЕФАН ТИПІНДЕГІ ФИЛЬТРАЦИЯ ТЕОРИЯСЫНЫҢ БІР МОДЕЛІНІҢ ҚИСЫНДЫЛЫҒЫ

Бұл тарауда фазалық ауысуды ескеретін фильтрация теориясының математикалық моделі қарастырылған. Қарастыратын есебіміз [1]-ші жұмыста берілген математикалық модельді зерттеудің логикалық жалғасы болып табылады. Дегенмен, көптеген авторлар фазалар арасында Генри заңы немесе Лэнгмюр заңы орындалады деп есептейді. [2]-ші жұмыстың нәтижелеріне сүйене отырып, төменде біз фазалар арасында тепе-теңдікке жету үшін белгілі бір релаксация уақыты бар деп есептейміз:

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{1}{\tau}(H(c) - s), \tag{2.1.1}$$

мұндағы τ оң тұрақты және релаксация уақыты деп аталынады. Онда беттік-белсенді заттардың (ББЗ) концентрациясы $c(x,t)$ төмендегі теңдеудің шешімі болады:

$$m \cdot \frac{\partial c}{\partial t} = D \cdot \Delta c - v \cdot \nabla c - \frac{\partial s}{\partial t}, \tag{2.1.2}$$

мұндағы m, D – оң тұрақтылар, m-ортаның қуыстылығы, D-диффузия коэффициеті, v – кеуекті ортадағы сұйықтық фильтрациясының жылдамдығы және

$$H(c) = \begin{cases} 0, & \mathrm{c}(x,t) < c_* \\ s, & \mathrm{c}(x,t) = c_*, \\ 1, & \mathrm{c}(x,t) > c_* \end{cases}$$

мұндағы c_*- шекарадағы мәні. Сонда (1), (2) жүйесі белгілі Стефан есебіне келтіріледі. Осыған ұқсас математикалық модельдер [1,2,7] зерттелген.

2.1 Есептің қойылымы

Ω – R^m-гі жеткілікті тегіс Γ шекарасы бар шенелген аймақ болсын. Мұндағы $Q_T = \Omega \times (0,T)$, $\Gamma_T = \Gamma \times (0,T)$. Q_T аймағында анықталған, (2.1.1), (2.1.2) теңдеулерді қанағаттандыратын $c(x,t)$, $s(x,t)$ функцияларын (қатты және сұйық фазалардағы ББЗ концентрациясы) табу қажет. Сонымен қатар, бұл функциялар төмендегі бастапқы шарттарды

$$c(x,0) = c_0(x), \quad s(x,0) = s_0(x), \quad x \in \Omega \tag{2.1.3}$$

және шекаралық шарттардың бірін қанағаттандыруы тиіс:

$$c(x,t) = c_\Gamma(x,t), \qquad (x,t) \in \Gamma_T \tag{2.1.4}$$

$$\left(\frac{\partial c}{\partial n} - v \cdot c(x,t)\right) = c_\Gamma(x,t), \ \ (x,t) \in \Gamma_T, \tag{2.1.5}$$

мұндағы n – Г шекарасына жүргізілген ішкі нормаль векторы. Келесіде (2.1.1.) - (2.1.4) есебін I есеп деп, ал (2.1.1) - (2.1.3), (2.1.5) есептерін II есеп деп түсінеміз.

Анықтама 2.1. I-ші (II-ші) есептің шешімі деп төмендегі шарттарды қанағаттандыратын $\{c, \ s\}$ функциялар жұбын атайды:

1. $c \in W_q^{2,1}(Q_T), \ \ 1 < q < \infty, \quad s_t, \ s \in L_\infty(Q_T)$;
2. (2.1.1), (2.1.2) теңдеулері Q_T-ң барлық жерінде дерлік (б.ж.д.) орындалады;
3. $c(x,t)$ үшін бастапқы және шекаралық шарттар көрсетілген кластардағы функция ізі мағынасында алынады, s үшін бастапқы шарт келесі түрде қабылданады: $\|s(x,t) - s_0\|_{\infty,\Omega} \to 0$, $t \to 0$.

Функциялардың нормалары мен кеңістіктерінің белгіленуі [2]-гі белгілеулермен сәйкес келеді.

Қосымша ұсыныстар

Лемма 2.1. $u \in W_p^1(Q)$ болсын, C- R^k-ғы шенелген аймақ, $p>1$, $A_\varepsilon = \{x \in Q \,|\, |u(x)| \le \varepsilon\}$. Онда A_0 –де б.ж.д. $\nabla u = 0$ болады.

Лемма 2.2. $Q - R^k$-ғы шенелген аймақ болсын, $v_n, v, g \in L_p(Q), p > 1, \forall x \in Q \backslash A$, $\lim\limits_{n\to\infty} v_n(x) = f(x)$ және $\forall n \in N$, $|v_n(x)| \le g(x)$, мұндағы $mesA = 0$**;** $L_p(Q)$-да $v_n \to v$ әлсіз жинақталады. Онда Q-да б.ж.д. $v \ge f$ болады. 1-2 леммалардың дәлелдеулерін [2]-ші жұмыста табуға болады. 1-Леммадан $E_c = \{(x,t) \in Q_T \,| c(x,t) = 0\}$ аймағында $c_t = \Delta c = 0$ теңдігінің орындалатындығы шығады. Онда (1.1), (1.2) теңдеулерінен б.ж.д. $(x,t) \in E_c$ үшін $H(c(x,t)) = s(x,t)$ екендігі шығады. $H(c)$ анықтамасынан, соның ішінде, б.ж.д. $(x,t) \in E_c$ үшін $0 \le s(x,t) \le 1$ екендігі шығады.

2.2 Математикалық модельдің қисындылығы

Тәуелсіз айнымалылар мен ізделінді функцияларды төмендегі түрде алмастырамыз:

$$t' = \frac{t}{\tau}, \quad x' = x\sqrt{m/\tau D}, \quad s' = s, \quad c' = cm, \ \ H(c) = H'(mc).$$

Сондай-ақ, сұйықтықты фильтрациялау жылдамдығы төменде барлық жерде оң тұрақты болып қабылданады және теңдеулерден штрихтар алынып тасталады.

$$s_t = H(c) - s, \tag{2.2.6}$$

$$c_t - \Delta c + v \cdot \nabla c + s_t = 0. \qquad (2.2.7)$$

Тәуелсіз айнымалылардың өзгеру аймағы, бастапқы және шекаралық деректер үшін бұрынғы белгілеулер сақталады. Келесіде I' (I'') есебін I (II) есеп деп түсінеміз, мұнда (2.1.1), (2.1.2) есептері (2.2.6), (2.2.7) есептеріне ауыстырылады.

Теорема 2.1. $\Gamma \in \mathrm{O}^2$ шекарасы және $u \in W_q^{2,1}(Q_T)$ функциясы (2.1.3), (2.1.4) шарттарын (сәйкесінше (2.1.3), (2.1.5)), s_0, c_0, $c_\Gamma(x,t)$ өлшенетін болсын және $0 \le \{s_0(x),\ c_0(x), c_\Gamma(x,t)\} \le 1,\ x \in \Omega$. Онда I' есебінің (сәйкесінше II' есебінің) жалғыз ғана шешімі бар. Сондықтан, келесі бағалаулар орынды:

$$\|c\|_{q,Q_T}^{(2)} \le K_1(1 + \|u\|_{q,Q_T}^{(2)}), \qquad 0 \le c(x,t) \le 1 \qquad (2.2.8)$$

$$0 \le s(x,t) \le 1, \qquad |s_t| \le 1. \qquad (2.2.9)$$

K_1 оң тұрақты саны тек қана q, Ω және Т –ға тәуелді. Айта кететін жайт, $q > (m+2)/2$ жағдайында қандай да бір $\alpha > 0$ үшін шешімі $c \in H^\alpha(Q_T)$ болады. $q > m + 2$ жағдайында ∇c гелдерлік болады.

2.3 Шешімнің бар болуы

$H(c)$ функциясы $c > \frac{1}{n} + c_*,\ c < c_*,\ n = 1, 2, 3, \ldots$ жағдайында үзіліссіз монотонды $\mathrm{H}_n(c)$ функцияларымен жуықталады. (2.2.6), (2.2.7) теңдеулері $(2.2.6)_n$, $(2.2.7)_n$ арқылы белгіленеді, мұнда H функциясының орнына $\mathrm{H_n}$ функциясы қарастырылады. Әрбір n үшін $(2.2.6)_n$, $(2.2.7)_n$, (2.1.3), (2.1.4) жуық есептері қарастырылады. $P\colon W_q^{2,1}(Q_T) \to W_q^{2,1}(Q_T)$ операторы анықталады, оның бекітілген нүктесі осы есептің шешімін береді. $c, g \in W_q^{2,1}(Q_T)$ болсын, егер c (2.2.7) теңдеуін және (2.1.3), (2.1.4) шарттарын қанағаттандырса, онда анықтамасы бойынша $c = P(g)$ болады

$$s(x,t) = s_0(x) \cdot e^{-t} + \int_0^t H_n(g(x,\mu)) \cdot e^{\mu - t} d\mu.$$

Ұсынылған жазбадан $s(x,t)$ үшін (2.2.9) бағалаудың орындалуы шығады. Сонда $c(x,t)$ үшін (8) бағалау орындалады. (2.1.3), (2.1.4), (2.2.8) шарттары $W_q^{2,1}(Q_T)$-де Р операторы өзіне қабылдайтын кейбір дөңес, тұйық, шектелген ішкі жиынды анықтайды. Р толық үзіліссіз болғандықтан, Шаудер теоремасы бойынша $(2.2.6)_n$, $(2.2.7)_n$, (2.1.3), (2.1.4) есептің шешімін беретін Р операторының бекітілген нүктесі бар. Оны $\{\mathrm{c}_n, s_n\}$ арқылы белгілейік. (2.2.8)-ң екінші бағалауы максимум принципінен шығады. Бұл ретте жоғарғы бағаны алу үшін кесу функциясы енгізіледі: $\hat{c} = \max\{0, c - 1\}$. Төменгі бағаны алу үшін кесу функциясының пішіні: $\hat{c} = \min\{0, c\}$. c_n, s_n үшін (2.2.8), (2.2.9) бағалаулары және $H_n(c_n)$ шенелгендігі бізге n_k тізбекшелерін таңдауға мүмкіндік береді, осылайша:

$$Q_T\text{-те б.ж.д. } c_{n_k} \to c,\ \frac{\partial c_{n_k}}{\partial t} \to \frac{\partial c}{\partial t},\ \ \nabla c_{n_k} \to \nabla c,$$
$$L_q(Q_T)\text{-де әлсіз } \Delta c_{n_k} \to \Delta c,$$
$$s_{n_k} \to s,\ \ \frac{\partial s_{n_k}}{\partial t} \to \frac{\partial s}{\partial t},\qquad H_{n_k}(c_{n_k}) \to \mathrm{h}\ \ *\text{ әлсіз } L_\infty(Q_T).$$

$H_n(c_n)$ функциясының анықтамасынан және Q_T-ң б.ж.д. $c_{n_k} \to c$ болғандықтан $Q_T \backslash E_c$-ң б.ж.д. $h(x,t) = H(c(x,t))$ екендігі шығады. E_c жиынында $h(x,t) = s(x,t)$ болады және $H(c)$ функциясының анықтамасы мен 2 леммадан : $0 \leq h(x,t) \leq 1$. Демек, E_c жиынында да $h(x,t)$ функциясы $H(c(x,t))$ функциясымен сәйкес келеді. $(2.2.6)_n$, $(2.2.7)_n$, (2.1.3), (2.1.4) –те $n_k \to \infty$ шекке көше отырып, $c(x,t)$, $s(x,t)$ шектік функциялары I' есебінің ізделінді шешімі болатындығын аламыз.

2.4 Шешімнің жалғыздығы

Шешімнің жалғыздығын дәлелдеу үшін түйіндес есептің шешілетіндігі көрсетіледі. c_i, $s_i, i = 1{,}2$ I' есебінің екі шешімі болсын. Келесі түрде өрнектейік:

$$c = c_1 - c_2,\quad s = s_1 - s_2,\quad H = H(c_1) - H(c_2),$$

c, s, H функциялары (2.2.6), (2.2.7) теңдеулерін және төмендегі шарттарды қанағаттандырсын:

$$c, s|_{t=0} = 0,\ \ c|_{\Gamma_T} = 0,\quad H|_E = s, \tag{2.4.10}$$

мұндағы $E = E_{c_1} \cap E_{c_2}$. E={(x,t)∈ Q_T| $|c(x,t)| \geq \delta\}$ жиынында көмекші F_δ және $F_{\varepsilon,\delta}$ функциялары енгізілді: $F_\delta = H/c$ және $Q_T \backslash E$-де $F_\delta = 0$ болады, ал $F_{\varepsilon,\delta}$ функциясы келесі шарттардан таңдап алынады:

$$F_{\varepsilon,\delta} \in \dot{C}^\infty(Q_T),\quad 0 \leq F_{\varepsilon,\delta} \leq F_\delta,\quad \lim_{\varepsilon \to 0} \left\| F_{\varepsilon,\delta} - F_\delta \right\|_{1,Q_T} = 0.$$

Q_T-те жеткілікті жатық және төмендегі шарттарды қанағаттандыратын φ, ψ функциялары қарастырылады:

$$\varphi, \psi|_{t \in [T_0, T]} = 0,\qquad \varphi|_{\Gamma_T} = 0,\quad 0 < T_0 \leq T \tag{2.4.11}$$

(2.1.6), (2.1.7), (2.4.10, (2.4.11) –ден келесі теңдік шығады:

$$\int_{Q_T}\{c \cdot M_1(\varphi,\psi) + s \cdot M_2(\varphi,\psi) + (H - F_{\varepsilon,\delta}c) \cdot \psi\}\, dx\, dt = 0, \quad (2.4.12)$$

мұндағы $M_1(\varphi,\psi) = \varphi_t + \Delta\varphi + v \cdot \nabla\varphi + F_{\varepsilon,\delta}\psi,\ M_2(\varphi,\psi) = \varphi_t + \psi_t - \psi.$

$G_1, G_2 \in \dot{C}^{\infty}(Q_{T_0})$ болсын және Q_{T_0} –де келесі теңдеулер қарастырылсын:

$$M_i(\varphi,\psi) = G_i, \quad i = 1{,}2. \quad (2.4.13)$$

(2.4.11), (2.4.13) есептердің шешімділігі локалді бар болу теоремасы мен априорлық бағалау негізінде стандартты жолмен алынады. (2.4.13)-ден ψ үшін келесі тұрпаты шығарылады:

$$\psi(x,t) = \int_t^{T_0}\{\psi(x,\mu) + G_2(x,\mu)\}d\mu - \varphi(x,t) \quad (2.4.14)$$

$\Phi(\mathrm{x},\mathrm{t})$ функциясы төмендегі теңдікпен анықталады:

$$\Phi(\mathrm{x},\mathrm{t}) = \varphi(x,t) \cdot e^t \quad (2.4.15)$$

Келесі теңдік (2.4.13) - (2.4.15)-ң салдары болып табылады:

$$\Phi \cdot \Phi_t + \Phi \cdot \Delta\Phi + v \cdot \Phi \cdot \nabla\Phi - \left(1 + F_{\varepsilon,\delta}\right) \cdot \Phi^2 = \{G_1 - F_{\varepsilon,\delta} \cdot \int_t^{T_0}(\psi + G_2)d\mu\} \cdot e^t \cdot \Phi \quad (2.4.16)$$

Φ функциясының ішкі максимум нүктесінде (2.4.16) қарастырайық. Бұл нүктеде алғашқы екі мүше оң емес, ал үшінші мүше нөлге айналады және (2.4.15) ескере отырып, келесі бағалауды аламыз:

$$|\varphi| \le |\Phi| \le \left\{\int_0^{T_0}(|\psi| + |G_2|)dt + |G_1|\right\} \cdot e^{T_0}. \quad (2.4.17)$$

(2.4.14) және (2.4.17) –ден Гронуолл теңсіздігі арқылы келесі бағалау шығады:

$$||\psi||_{\infty,Q_T} \le e^{T_0}||G_1|\quad|_{\infty,Q_{T_0}} + К_2 \cdot T_0. \quad (2.4.18)$$

$К_2$ тұрақтысы Т-ға тәуелді және нормасы $||G_i||_{\infty,Q_{T_0}}$, i=1,2.

$\varepsilon \to 0$ бойынша шекке өткеннен кейін, содан кейін $\delta \to 0$ ұмтылдырып (2.4.18) бағалау және (2.4.10) шарттар арқылы (2.4.12) теңдік келесі түрді болады:

$$\int_Q \{c \cdot G_1 + s \cdot G_2\}\, dxdt + \int_E \psi \cdot s\, dxdt = 0. \quad (2.4.19)$$

$G_i,\ i = 1,2$ функцияларын $L_\infty(Q_{T_0})$-гі кез-келген функциялар деп есептеуге болады. $T_0 = min\left(T, \frac{1}{2\cdot K_2}\right)$ деп алайық. (2.4.18), (2.4.19)-дан $G_1 = 0,\ G_2 = sign\ s$ деп таңдасақ Q_{T_0}-де $s = 0$ болатындығын аламыз. (2.4.19)-дан $G_2 = 0,\ G_1 = sign$ с деп алсақ Q_{T_0}-де с $= 0$ болады. $\Omega x[T_0,\ 2\cdot T_0]$, $\Omega x[2\cdot T_0,\ 3\cdot T_0\ ]$ –де шешімнің жалғыздығы дәл осылай көрсетілген және т.с.с. Қадамдардың ақырлы санында Q_T-де шешімнің жалғыздығы алынады.

2.5 Бастапқы және шекаралық мәліметтерге қатысты шешімнің үзіліссіздігі

$c_i,\ s_i, i = 1,2 -\ II'$ есебінің екі решімі болсын және келесі бастапқы және шекаралық шарттарды қанағаттандырсын:

$$c_i(x,0) = u_i(x,0),\ s_i(x,0) =\ s_{0i}(x),\ \ x \in \Omega.$$
$$\left(\frac{\partial c_i}{\partial n} - v\cdot c_i\right)\Big|_{\Gamma_T} = \left(\frac{\partial u_i}{\partial n} - v\cdot u_i\right)\Big|_{\Gamma_T},\ \ i = 1,2.$$

Келесі белгілеулерді енгіземіз:

$$c = c_1 - c_2,\quad s = s_1 - s_2,\quad H = H(c_1) - H(c_2),\quad s_0 = s_{01} - s_{02},$$
$$u = u_1 - u_2,\quad \delta = \|u\|_{q,Q_T}^{(2)} + \|s_0\|_{\infty,\Omega},\quad c_0 = c_{01} - c_{02},\quad c_\Gamma = c_{\Gamma 1} - c_{\Gamma 2}.$$

Сонда c, s, H функциялары (2.2.6), (2.2.7) теңдеулерін және (2.1.3), (2.1.5) шарттарын қанағаттандырады.

Теорема 2.2. $u_i,\ s_{0i},\ i = 1,2$ функциялары үшін 1-теореманың болжамдары орындалса, онда келесі бағалаулар дұрыс болады:

$$\|c\|_{q,Q_T}^{(2)} \le K_3\cdot\delta^{1/q}, \tag{2.5.20}$$

$$\|s_t\|_{p,Q_T} + \|s\|_{p,Q_T} \le K_4\cdot\delta^{\frac{1}{p}}, \tag{2.5.21}$$

мұндағы $1 \le p < \infty,\ K_3,\ \ K_4$ тұрақтылары $q, T, \Omega, \|u_i\|_{q,Q_T}^{(2)},\ \|s_{0i}\|_{\infty,\Omega},\ i = 1,2$ тәуелді.

Дәлелдеуі. (7) теңдеуді $c\cdot(c^2+\varepsilon)^{-\frac{1}{2}},\ \ \varepsilon > 0$ көбейтеміз және Q_θ аймағы бойынша интегралдаймыз:

$$\int_{Q_\theta}\{[(c^2+\varepsilon)^{\frac{1}{2}}]_t + \varepsilon\cdot(\nabla c)^2\cdot(c^2+\varepsilon)^{-\frac{3}{2}} + H\cdot c\cdot(c^2+\varepsilon)^{-\frac{1}{2}} - s\cdot c\cdot$$
$$(c^2+\varepsilon)^{-\frac{1}{2}}\}dxdt =$$
$$= \int_\Gamma\ c_\Gamma\cdot c\cdot(c^2+\varepsilon)^{-\frac{1}{2}}d\Gamma + \varepsilon\cdot v\cdot\int_{Q_\theta}\nabla\left[(c^2+\varepsilon)^{\frac{1}{2}}\right]dxdt.$$

Бұл теңдікте теріс емес $\varepsilon \cdot (\nabla c)^2 \cdot (c^2+\varepsilon)^{-\frac{3}{2}}$ мүшесін алып тастап, алынған теңсіздікте $\varepsilon \to 0$ шегіне өтеміз:

$$\int_{Q_\theta} \{|\boldsymbol{c}|_{\boldsymbol{t}} + |H| - |s|\} dxdt \le \int_\Gamma |c_\Gamma| d\Gamma. \tag{2.5.22}$$

$$\int_{Q_\theta} \{|\boldsymbol{s}|_{\boldsymbol{t}} + |s| - |H|\} dxdt \le 0. \tag{2.5.23}$$

(2.5.22), (2.5.23) теңсіздіктерінен келесі бағалау шығады:

$$\int_\Omega \{|c(x,\theta)| + |s(x,\theta)|\} dx \le \|c_0\|_{1,\Omega} + \|s_0\|_{1,\Omega} + \|c_\Gamma\|_{1,\Gamma_\theta} \le \mathrm{K} \cdot \delta. \tag{2.5.24}$$

(2.5.22), (2.5.24) бағалауларынан келесі теңсіздік шығады: $\|H\|_{1,Q_T} \le K \cdot \delta$. Осы жерден және (2.2.6) теңдіктен келесі бағалау шығады: $\|s_t\|_{1,Q_T} \le K \cdot \delta$. (2.5.21)-ші бағалау $\|s\|_{\infty,Q_T}$ нормасының шенелгендігінің және алынған бағалаудың салдары болып табылады. (2.2.7), (2.1.3), (2.1.5) есептердің шешімі ретінде $c(x,t)$ функциясын қарастыра отырып, (2.5.21) ескере отырып, (2.5.20) бағалауды аламыз. Айта кететін жайт, қарапайым үзіліссіздікті алу үшін $\lim\limits_{\delta \to 0} \|s_t\|_{\infty,Q_T} = 0$ екендігін көрсетсе жеткілікті. Жалпы жағдайда, бұл теңдік орындалмайды.

Қарастырылып отырған есептің екі шешімі болсын: $c \equiv 0$, $s \equiv 0$ және $c(x,t) = 1 - s(x,t)$,

$$0 < \varepsilon < 1, \qquad s(x,t) = \begin{cases} 1 - e^{-t}, & 0 \le t \le -\ln(1-\varepsilon), \\ \varepsilon, & -\ln(1-\varepsilon) \le t \le T. \end{cases}$$

Екінші шешім келесі бастапқы және шекаралық шарттарды қанағаттандырады:

$$c|_{t=0} = \varepsilon, \quad s|_{t=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial c}{\partial n} - v \cdot c\right)|_{\Gamma_T} = 0.$$

Бұл жағдайда $\delta = \varepsilon$, ал $\|s_t\|_{\infty,Q_T} = 1$ екендігі анық.

2.6 Релаксация уақыты бойынша шекке көшу

Төменде I есептің мысалын пайдалана отырып, $\tau \to 0$ кезіндегі шешімнің әрекетін зерттейміз. II есеп үшін ұқсас нәтиже дұрыс болып табылады. $K(Q_T)$-нормасы бар функциялар кеңістігін енгізейік:

$$\|u\|_{K,T} = \|u\|_{\infty,Q_T} + \|u_{tt}\|_{1,Q_T} + \|\nabla u\|_{2,Q_T} + \|u_t\|_{2,Q_T} + \|\nabla u_t\|_{2,1,Q_T}.$$

(2.1.1), (2.1.2) есептерін және төмендегі шарттарды қанағаттандыратын $c^{\tau}(x,t)$, $s^{\tau}(x,t)$ функциялары қарастырылады:

$$(c^{\tau}(x,t)-c_0^{\tau})|_{\Gamma_T\cup\{t=0\}}=0, \qquad s^{\tau}|_{t=0}=s_0^{\tau}, \tag{2.6.25}$$

мұндағы

$$c_0^{\tau}\in W_q^{2,1}(Q_T)\cap K(Q_T),\ \ s_0^{\tau}\in L_\infty(\Omega) \text{ және } s_0^{\tau}(x)=H\big(c_0^{\tau}(x)\big), \quad x\in\Omega. \tag{2.6.26}$$

Жалпылықты жоғалтпай, төмендегі барлық жердегі тұрақтылар бірлікке тең деп қабылданады.

Лемма 2.3. (2.1.1), (2.1.2), (2.6.25), (2.6.26) есептерді шешу үшін келесі бағалаулар орынды:

$$\|c^{\tau}\|_{\infty,Q_T}\le K_5, \tag{2.6.27}$$

$$\|c_t^{\tau}\|_{2,Q_T}+\max_{[0,T]}\|\nabla c^{\tau}\|_{2,\Omega}\le K_6, \tag{2.6.28}$$

$$\|H(c^{\tau})-s^{\tau}\|_{1,Q_T^{\delta}}\le K_7\cdot\delta^{-1/2}\cdot\tau\,, \quad \delta>0, \tag{2.6.29}$$

мұндағы $Q_T^{\delta}=\Omega^{\delta}\times(0,T)$, $\quad \Omega^{\delta}=\{x\in\Omega|\ dist|(x,\mu)>\delta\},\ \delta>0\}$, ал K_i, i=5, 6, 7 тұрақтылары тек қана T,Ω және $\|c_0^{\tau}\|_{K,T}$ тәуелді.

Дәлелдеуі. (2.1.1), (2.1.2) теңдеуінен және (2.6.26) шартынан келесі бағалау шығады:

$$0\le s^{\tau}(x,t)\le 1,\quad s_t^{\tau}\cdot(c^{\tau}-c^*)\ge 0,\qquad \int_0^{\theta} s_t^{\tau}\cdot(c^{\tau}-c^*)_t dt\ge 0,$$
$$\theta\le \mathrm{T}.$$

Максимум қағидасынан келесі бағалау шығады: $0\le c^{\tau}(x,t)\le 1$. Осы жерден және ары қарай түсініспеушіліктер туындамайтын жерде c_0^{τ}, c^{τ}, s^{τ} функцияларының τ индексі алынып тасталады. Соңғысы қалай алынғанын көрсетейік:

$$\tau\int_0^{\theta}s_t\cdot(c-c^*)_t\,dt=\int_0^{\theta}(H(c)-s)\cdot(c-c^*)_t dt=(H(c)-s)\cdot$$
$$(c-c^*)|_0^{\theta}++\int_0^{\theta}s_t\cdot(c-c^*)\,dt\ge 0.$$

Алынған бағалаулардан және [2]-ң нәтижелерінің негізінде (2.6.28) бағалауы шығады. (2.6.29) бағалауды алу үшін келесі функция енгізіледі:

$$f\in W_2^1(\Omega),\quad f|_{\Omega^{\delta}}=1,\ \ \|\dot{\nabla}f\|_{2,\Omega}\le K(\Omega)\cdot\delta^{-1/2}.$$

Әрі қарай (2.1.2) теңдеу $f \cdot c \cdot (c^2+\varepsilon)^{-\frac{1}{2}}, \quad \varepsilon > 0$ өрнегіне көбейтіледі және Q_T бойынша интегралданады:

$$\int_{Q_\theta} \{[f \cdot (c^2+\varepsilon)^{\frac{1}{2}}]_t + \varepsilon \cdot f \cdot (\nabla c)^2 \cdot (c^2+\varepsilon)^{-\frac{3}{2}} + s_t \cdot f \cdot c \cdot (c^2+\varepsilon)^{-\frac{1}{2}}\} dxdt =$$
$$= \varepsilon \cdot v \cdot \int_{Q_\theta} \nabla f \cdot \nabla \left[(c^2+\varepsilon)^{\frac{1}{2}}\right] dxdt + \int_{Q_\theta} \nabla f \cdot \nabla \mathrm{c} \cdot \mathrm{c} \cdot (c^2+\varepsilon)^{-\frac{1}{2}} dxdt.$$

$\varepsilon \to 0$ жағдайында шекке өтіп және сол жақтағы теріс емес мүшелерді алып тастасақ, біз (2.6.29) бағалауды аламыз (2.6.29). Лемма дәлелденді.

$U = c + H(c)$ бастапқы және шекаралық шарттарды қанағаттандыратын Стефан есебінің жалпылама шешімі болсын (анықтаманы, мысалы, [9] қараңыз):

$$U(x,0) = c_0(x,0) + s_0(x), \quad x \in \Omega, \tag{2.6.30}$$

$$c(x,t) = c_0(x,t), \quad (x,t) \in \Gamma_T,$$

мұндағы $\mathrm{c}_0 \in K(Q_T), \quad s_0 \in L_\infty(\Omega), \quad s_0 = H(c_0(x,0))$.

Теорема 2.3. Егер

$$\tau \to 0 \text{ болғанда } \|\mathrm{c}_0^\tau - \mathrm{c}_0\|_{K,T} + \|s_0^\tau - s_0\|_{1,\Omega} \to 0, \tag{2.6.31}$$

онда $\mathrm{c}^\tau + s^\tau$ өрнегі $\tau \to 0$ –да келесі мағынада U –ға жинақталады:

$$\begin{aligned} &c^{\tau_k} \to c^\circ, \ W_2^1(Q_T)\text{-де әлсіз}, \quad * \text{ әлсіз } L_\infty(Q_T)\text{-да}, \\ &s^{\tau_k} \to H(c^\circ) \quad * \text{ әлсіз } L_\infty(Q_T)\text{-да}, \ \tau_k \to 0. \end{aligned} \tag{2.6.32}$$

Шындығында да, $\mathrm{c}^\tau, \ s^\tau$ функциялары келесі теңдікті қанағаттандырады:

$$\int_{Q_T} \{\mathrm{c}^\tau \cdot \varphi - (\mathrm{c}^\tau + s^\tau) \cdot \varphi_t\} dxdt = \int_\Omega (c_0^\tau + s_0^\tau) \cdot \varphi(x,0) dx$$

кез-келген $\varphi \in W_2^1(Q_T), \quad \varphi|_{\Gamma_T \cup \{t=0\}} = 0$ үшін.

Сонда (2.6.31) шарттары мен (2.6.27) – (2.6.29) бағалаулары, $\tau_k \to 0$ кезде (2.6.32) орындалатындай $\tau \to 0$ үшін жалғыздыққа байланысты Стефан есебінің шешіміне бүкіл үйірі жинақталатындай тізбекшені таңдап алуға мүмкіндік береді.

2.7 Сандық тәжірибелер

Алғашқы берілген есепті шешу алгоритмдерін құруға кіріспес бұрын, практикалық маңызы зор [5]-гі бір үлгілік есепті талдаймыз, өйткені берілген теңдеулерін өзгеру кинетикасының қандай да бір параметрлерін ескерген жағдайдағы модельдердің негізінде жатыр:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + \chi \frac{\partial w}{\partial t} = 0 \qquad (2.7.33)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{1}{\tau}\left[H(u) - w\right] + \lambda \Delta w \qquad (2.7.34)$$

$$H(u) = \begin{cases} 1, u > u^* \\ w, u = u^*, \\ 0, u < u* \end{cases} \qquad (2.7.35)$$

мұнда $H(u)$ фазалық ауысуды сипаттайды, τ- релаксация уақыты, χ, λ - процестер сипатының үлесін (өтпелі және баяу) ескеретін оң салмақ коэффициенттері. (2.7.33) - (2.7.35) үшін келесі бастапқы және шекаралық шарттар беріледі:

$$u(x,0) = u_0(x),\ w(x,0) = w_0(x),\ x \in \Omega \qquad (2.7.36)$$

$$u(x,t) = u_s(x,t), \quad (x,t) \in S_T \qquad (2.7.37)$$

(2.7.33) – (2.7.37) есептің дұрыстығы және шешімдердің сапалық қасиеттері (уақыттың шексіз ұлғаюымен ерітіндінің асимптотикалық тұрпаты, релаксация уақыты бойынша және λ ылғалдың миграциясы бойынша шекке көшулер). (2.7.33) – (2.7.37) есептің Стефан типті есеп екені дәлелденеді. $\lambda \to 0$ кезінде (2.7.33) – (2.7.37) есебі ылғалдылық миграциясын есепке алмайтын есепті шешуге ұмтылады ([5] жұмыста егжей-тегжейлі зерттелді). (2.7.33) – (2.7.37) - ге ұқсас теңдеулер жүйесі бірқатар ерекшеліктерге ие екені белгілі, атап айтқанда, τ, χ, λ мәндеріне тәуелді және u^* жүйенің шешімі не мүлдем жоқ немесе фазалық ауысу аймағының кеңеюіне немесе тарылуына әкелетін секірістерді қамтиды. Берілген шекаралық және бастапқы шарттардың түрімен берілген бір өлшемді жағдай үшін ғана сандық алгоритмді ұсынайық, яғни:

$$u_t - u_{xx} + \chi w_t = 0 \qquad (2.7.38)$$

$$w_t = \frac{1}{\tau}\left[H(u) - w\right] + \lambda w_{xx} \qquad (2.7.39)$$

$$H(u) = \begin{cases} 1, u > u^* \\ w, u = u^* \\ 0, u < u* \end{cases} \qquad (2.7.40)$$

бастапқы және шекаралық шарттар:

$$u(x,0) = e^{-x}, \; w(x,0) = 1 - e^{-x} = w_0(x), \; x \in \Omega \tag{2.7.41}$$

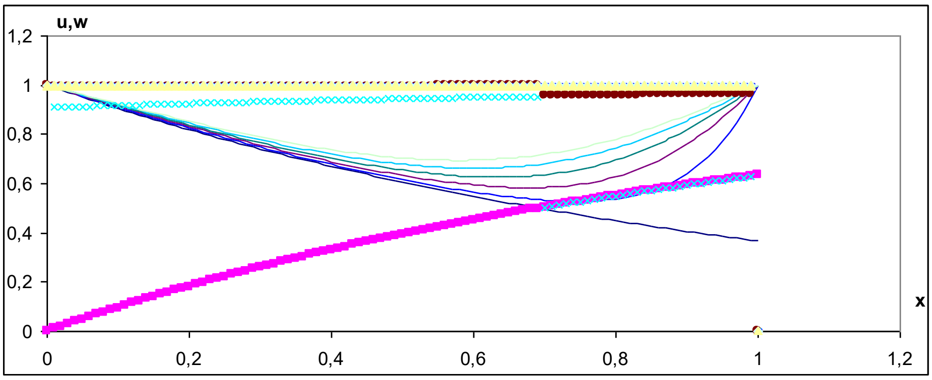
$$u(0,t) = (1+t)^2, u(1,t) = (1+t)^3, \; (x,t) \in S_T. \tag{2.7.42}$$

(2.7.38) - (2.7.42) жүйесінде алдымен берілген u мәні үшін сәйкес шекаралық шарттармен берілген (2.7.39)-ды шешеміз. Әрі қарай табылған w мәні бойынша u-ді табамыз. Ол үшін біркелкі торды енгіземіз $x_i = x_0 + ih, \; i = \overline{0, N}$, мұндағы $h = const$ – тор қадамы $t^n = n\tilde{\tau}, \; n = 0,1,2...$, мұндағы $\tilde{\tau}$ – уақыт қадамы. u, w ізделінді функциялары (x_i, t^n) түйіндерінде сәйкесінше u_i^n, w_i^n деп белгіленеді. Онда h тұрақты тор қадамы үшін (38) және (39) теңдеулер жүйесінің айырымдылық түрін жазамыз.

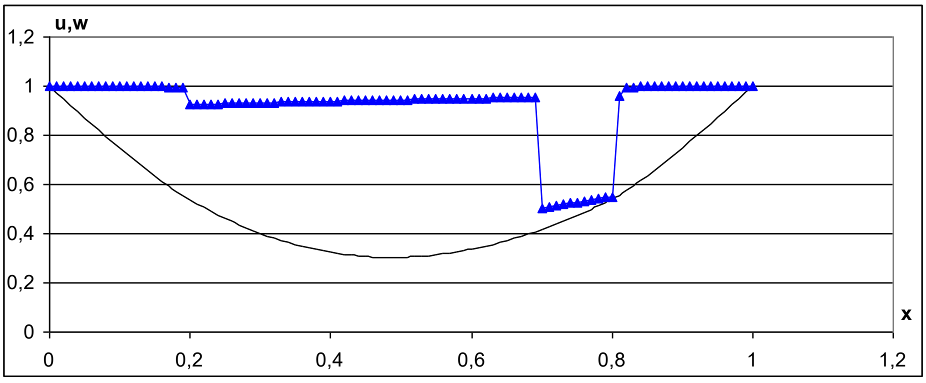
$$\frac{1}{\tau}(H(u_i^n) - w_i^{n+1}) + \lambda \frac{w_{i+1}^{n+1} - 2w_i^{n+1} + w_{i-1}^{n+1}}{h^2} = \frac{w_i^{n+1} - w_i^n}{\tilde{\tau}} \tag{2.7.43}$$

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tilde{\tau}} + \chi \frac{w_i^{n+1} - w_i^n}{\tilde{\tau}} = \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{h^2} \tag{2.7.44}$$

Әрбір теңдеу үшін қуалау әдісін қолдану арқылы берілген жүйе рет-ретімен шешіледі. Қуалау әдісінің орнықтылық шарты орындалады.

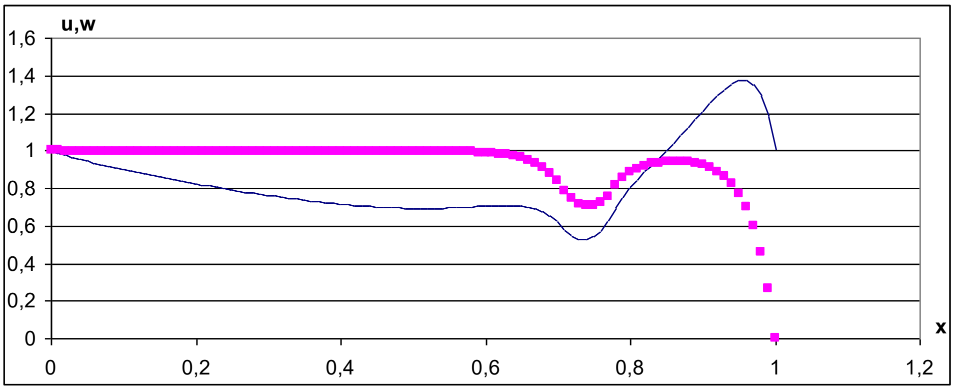


1 сурет – u-ң таралуы (жіңішке сызық) және w (қалың сызық) $\lambda = 0$, $\chi = 0$, $u^* = 0{,}5$ жағдайында.

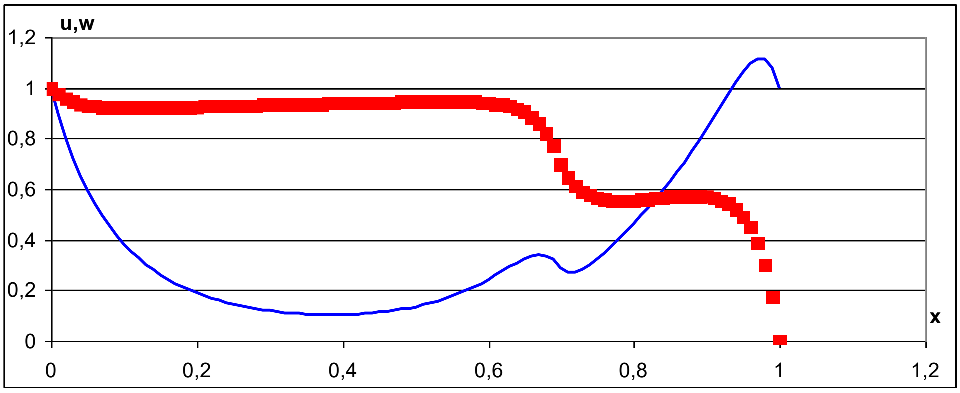


2 сурет – u-ң таралуы (жіңішке сызық) және w (қалың сызық)

$\lambda = 0$, $\chi = 1$, $u^* = 0{,}5$ жағдайында.



3 сурет – u -ң таралуы (жіңішке сызық) және w (қалың сызық) $\lambda = 1$, $\chi = 0$, $u^* = 0{,}5$ жағдайында.



4 сурет – u -ң таралуы (жіңішке сызық) және w (қалың сызық) $\lambda = 1$, $\chi = 1$, $u^* = 0{,}5$ жағдайында.

Алынған сандық нәтижелер қарапайым түрлендірулерден кейін бастапқы есепті шешу үшін жарамды. Сонымен қатар, [5]-ң нәтижелері бастапқы есепті шешу үшін жарамды.

3 ШЕКАРАСЫ СЫЗЫҚТЫ ЕМЕС ПСЕВДОПАРАБОЛАЛЫҚ ТЕҢДЕУ ҮШІН ҚОЙЫЛҒАН БАСТАПҚЫ - ШЕТТІК ЕСЕПТІҢ ШЕШІМДІЛІГІ

Бұл тарауда Нейман-Дирихле типті сызықты емес шекаралық шарты бар псевдопараболалық типті квазисызықты теңдеу үшін қойылған бастапқы-шеттік есеп зерттелген. Физикалық тұрғыдан алғанда, бұл тарауда қарастырылатын бастапқы-шеттік есеп әр түрлі физикалық факторларды ескерген кездегі жартылай өткізгіштер мен магниттердегі квазистационарлық процестердің математикалық моделі болып табылады. Бұл есепте газдалған сұйықтық есебінің шешімінің сапалық қасиеті қарастырылады.

3.1 Есептің қойылымы

$Q_t = \{(x,t): x \in \Omega, \Omega \subset R^n, 0 < t < T\}$ цилиндрінде, $\Omega \subset R^n, n \geq 3$ шенелген аймағында

$$\frac{\partial}{\partial t}(u - \chi\Delta u) - \left(a_0 + a_1\|\nabla u\|_{2,\Omega}^{2q-2}\right)\Delta u = b(x,t)|u|^{p-2}u + f(x,t),\ (x,t) \in Q_T \tag{3.1.1}$$

квазисызықтық теңдеуін

$$\frac{\partial u}{\partial n} + k(x,t)|u|^{\sigma-2}u|_\Gamma = 0,\ \Gamma = \partial\Omega \times (0,T), \tag{3.1.2}$$

сызықты емес шекаралық шартты және

$$u(x,0) = u_0(x),\ x \in \Omega. \tag{3.1.3}$$

бастапқы шартын қанағаттандыратын $u(x,t)$ функциясын табуымыз керек. Мұндағы $\partial\Omega$ жеткілікті тегіс шекара, сонымен қатар p, q, a_0, a_1 және σ оң тұрақты сандар. $b(x,t)$, $f(x,t), k(x,t)$ функциялары және $u_0(x)$ келесі шарттарды қанағаттандырады:

$$0 < b_0 \leq b(x,t) \leq b_1 < \infty, 0 < b_t(x,t) \leq b_1 < \infty, \forall(x,t) \in Q_T;$$

$$0 < k_0 \leq k(x,t) \leq k_1 < \infty, 0 \leq \frac{k_t(x,t)}{k(x,t)} \leq K_1, \frac{|k_{tt}(x,t)|}{k(x,t)} \leq K_2,\ \forall(x,t) \in Q_T; \tag{3.1.4}$$

$$\|f(x,t)\|_{2,\Omega}^2 \leq C_0, \forall t \in [0,T], u_0(x) \in W_2^1(\Omega).$$

Анықтама 3.1. (3.1.1)-(3.1.3) есебінің әлсіз жалпылама шешімі деп

$u(x,t)\epsilon W_2^1(0\,,T\,;\,W_2^1(\Omega))\cap L_\sigma(\Gamma)$ келесі интегралдық тепе-теңдікті қанағаттандыратын

$$\int_0^T\int_\Omega\left(\frac{\partial u}{\partial t}v+\chi\nabla u_t\cdot\nabla v+\left(a_0+a_1\|\nabla u\|_{2,\Omega}^{2q-2}\right)\nabla u\cdot\nabla v\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)dxdt-$$

$$-\int_0^T\int_\Omega b(x,t)\,|u|^{p-2}uvdxdt+$$

$$+\int_0^T\int_\Gamma\left(\left(a_0+a_1\|\nabla u\|_{2,\Omega}^{2q-2}\right)k(x,t)|u|^{\sigma-2}u+\chi k_t(x,t)|u|^{\sigma-2}u\right)vd\Gamma dt+$$

$$+\chi(\sigma-1)\int_0^T\int_\Gamma k(x,t)|u|^{\sigma-2}\,u_tvd\Gamma dt=\int_0^T\int_\Omega fvdxdt,$$

функцияны айтамыз. Мұндағы барлық $v(x,t)\in L_2(0,T;\,W_2^1(\Omega))$.

Бұл 3.1 анықтамаға балама анықтамасын берейік ([35], [36] қараңыз):

Анықтама 3.2. (3.1.1)-(3.1.3) есебінің әлсіз жалпылама шешімі деп $u(x,t)\in W_2^1(0\,,T\,;\,W_2^1(\Omega))\cap L_\sigma(\Gamma)$ кеңістігіндегі келесі интегралдық тепе-теңдікті қанағаттандыратын

$$\int_0^T\int_\Omega\left(\frac{\partial u}{\partial t}v(x)\varphi(t)+\chi\varphi(t)\nabla u_t\cdot\nabla v+\left(a_0+a_1\|\nabla u\|_{2,\Omega}^{2q-2}\right)\varphi(t)\nabla u\cdot\nabla v\right)dxdt-\int_0^T\int_\Omega b(x,t)\,|u|^{p-2}uv(x)\varphi(t)dxdt+$$
$$\int_0^T\int_\Gamma\left(\left(a_0+a_1\|\nabla u\|_{2,\Omega}^{2q-2}\right)k(x,t)|u|^{\sigma-2}u+\chi k_t(x,t)|u|^{\sigma-2}u\right)v(x)\varphi(t)d\Gamma dt+$$
$$+\chi(\sigma-1)\int_0^T\int_\Gamma k(x,t)|u|^{\sigma-2}\,u_tv(x)\varphi(t)d\Gamma dt=\int_0^T\int_\Omega fv(x)\varphi(t)dxdt,\tag{3.1.5}$$

функцияны айтамыз. Мұндағы барлық $\varphi(t)\in L_2(0,T),v(x)\in W_2^1(\Omega)$.

3.2 Галеркин жуықтаулары

$H^1(\Omega)$ кеңістігінде базис құрайтын $\{\psi_j(x)\}$ функциялар жүйесін таңдап алайық. Мұндай жүйе, әрине бар екені сөзсіз, себебі $H^1(\Omega)$ кеңістігі - сепарабелді кеңістік. (3.1.1)-(3.1.3) есебінің жуық шешімін келесі түрде іздейміз:

$$u_m=\sum_{k=1}^m C_{mk}(t)\Psi_k(x),$$

мұндағы $C_{mk}(t)$ келесі Коши есебінен алынады:

$$\sum_{k=1}^{m} C'_{mk}(t) \int_{\Omega} \left[\Psi_k \Psi_j + \chi \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Psi_k}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \Psi_j}{\partial x_i}\right] dx +$$

$$+\chi(\sigma-1) \sum_{k=1}^{m} C'_{mk}(t) \int_{\Gamma} k(x,t) |u_m|^{\sigma-2} \Psi_k \Psi_j \cdot d\Gamma +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m} C_{mk}(t) \left(a_0 + a_1 \|\nabla u_m\|_{2,\Omega}^{2q-2}\right) \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Psi_k}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \Psi_j}{\partial x_i} dx + \qquad (3.2.1)$$

$$+ \sum_{k=1}^{m} C_{mk}(t) \left(a_0 + a_1 \|\nabla u_m\|_{2,\Omega}^{2q-2}\right) \int_{\Gamma} k(x,t) |u_m|^{\sigma-2} \Psi_k \Psi_j d\Gamma +$$

$$+\chi \sum_{k=1}^{m} C_{mk}(t) \int_{\Gamma} k_t(x,t) |u_m|^{\sigma-2} \Psi_k \Psi_j d\Gamma -$$

$$- \sum_{k=1}^{m} C_{mk}(t) \int_{\Omega} b(x,t) |u_m|^{p-2} \Psi_k \Psi_j dx = \int_{\Omega} f \cdot \Psi_j dx, \qquad j = 1, \ldots, m.$$

$$C_{mk}(0) = \int u_m(0) \Psi_k dx \,, u_{m0} = u_m(0) = \sum_{k=1}^{m} C_{mk}(0) \Psi_k = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \Psi_k, \qquad (3.2.2)$$

сонымен қатар

$m \to \infty$ ұмтылғанда $H^1(\Omega)$ – де $u_{m0} \to u_0$ әлді жинақталады. (3.2.3)

Келесі белгілеуді енгіземіз: $\vec{C}_m \equiv \{C_{1m}(t), \ldots, \ C_{mm}(t)\}^T$,

$$a_{kj} = \int_{\Omega} \left[\Psi_k \Psi_j + \chi\left(\nabla \Psi_k, \nabla \Psi_j\right)\right] dx + \chi(\sigma-1) \int_{\Gamma} k(x,t) |u_m|^{\sigma-2} \Psi_k \Psi_j d\Gamma,$$

$$b_{kj} = -\left(a_0 + a_1 \|\nabla u_m\|_{2,\Omega}^{2q-2}\right) \int_{\Omega} \left(\nabla \Psi_k, \nabla \Psi_j\right) dx -$$

$$-\left(a_0 + a_1 \|\nabla u_m\|_{2,\Omega}^{2q-2}\right) \int_{\Gamma} k(x,t) |u_m|^{\sigma-2} \Psi_k \Psi_j d\Gamma$$

$$-\chi \sum_{k=1}^{m} C_{mk}(t) \int_{\Gamma} k_t(x,t) |u_m|^{\sigma-2} \Psi_k \Psi_j d\Gamma +$$

$$+ \int_{\Gamma} b(x,t) |u_m|^{p-2} \Psi_k \Psi_j dx + \int_{\Omega} f \cdot \Psi_j dx.$$

$$A_m(\vec{C}_m) \equiv \{a_{jk}(\vec{C}_m)\}, \ \ \vec{G}_m(\vec{C}_m) \equiv \{b_{jk}(\vec{C}_m)\} \vec{C}_m.$$

Сонда (3.2.1)-(3.2.2) теңдеулер жүйесі матрицалық пішінді қабылдайды:

$$A_m \overrightarrow{C'}_m = \overrightarrow{G}_m(\vec{C}_m), \vec{C}_m(0) = \vec{\alpha}. \quad (3.2.4)$$

A_m матрицасы инверсиялы. Квадраттық формасы келесі түрде болады:

$$\sum_{k,j=1}^{m} a_{kj}\xi_k\xi_j = \int_\Omega |\eta|^2 dx + \chi \int_\Omega |\nabla\eta|^2 dx,\ \eta = \sum_{l=1}^{m} \xi_l \psi_l.$$

Бұл өрнек сонда және тек қана сонда нөлге тең болады, егер η = 0 болса. A_m матрицасының оң анықталғандығын ескере отырып, (3.2.4) келесі түрде ықшамдалады:

$$\overrightarrow{C'}_m = A_m^{-1}\vec{G}_m(\vec{C}_m), \vec{C}_m(0) = \vec{\alpha}. \quad (3.2.5)$$

Коши есебінің Пеано теоремасы бойынша (2.2.5) есебінің қандай да бір $t \in (0, T_m), T_m > 0$ уақыт интервалында $\vec{C}_m$-де кем дегенде бір шешімі бар. Келесі қадамда (3.2.4) Коши есебінің [0, T] аралығында глобалді шешімі бар екенін дәлелдейтін априорлық бағалауларды аламыз.

3.3 Априорлық бағалау

(3.2.1) теңдігінің екі жағын да $C_{mj}(t)$ –ге көбейтеміз және $j = \overline{1, m}$ бойынша қосындылаймыз. Нәтижесінде бірінші энергетикалық теңдікті аламыз:

$$\frac{dE}{dt} + a_0 \int_\Omega |\nabla u_m|^2 dx + a_1 \left(\int_\Omega |\nabla u_m|^2 dx \right)^q +$$

$$+\left(a_0 + a_1 \|\nabla u_m\|_{2,\Omega}^{2q-2}\right) \int_\Gamma k(x,t)|u_m|^\sigma d\Gamma = \quad (3.3.1)$$

$$\int_\Omega b(x,t)|u_m|^p dx - \frac{\chi}{\sigma}\int_\Gamma k_t(x,t)|u_m|^\sigma d\Gamma + \int_\Omega f \cdot u_m dx,$$

мұнда

$$\mathrm{E(t)} \coloneqq \frac{1}{2}\int_\Omega [|u_m|^2 + \chi|\nabla u_m|^2]\, dx + \chi\frac{\sigma - 1}{\sigma}\int_\Gamma k(x,t)|u_m|^\sigma d\Gamma.$$

Әрі қарай біз келесі Лемма 1-ді қолданамыз.

Лемма 3.1. (Бірінші локалді бағалау) (3.1.4) шарттары орындалсын және

$q > 1, 2 < p < \frac{2n}{n-2}$, $n \geq 3, \sigma > 1$. Сонда, $u_m(x,t)$ функциясы үшін келесі бағалаулар дұрыс болатындай $T_0 > 0$ табылады:

$$E(t) \leq C_4, for\ all\ t \in [0,T], T < T_0,$$
$$\int_0^t \left(\int_\Omega |\nabla u_m(t)|^2 dx + \left(\int_\Omega |\nabla u_m(t)|^2 dx \right)^q \right) dt +$$
$$+ \int_0^t \left(a_0 + a_1 \|\nabla u_m\|_{2,\Omega}^{2q-2} \right) \int_\Gamma k(x,t)|u_m|^\sigma d\Gamma dt \leq C_5,$$

мұндағы C_4, C_5 тұрақтылары $m \in N$-ге тәуелді емес, бірақ $0 < t < T_0$-ге тәуелді.

Дәлелдеуі. (3.3.1) теңдігінің оң жағын келесі түрде бағалаймыз:

$$\left| \int_\Omega b(x,t)|u_m|^p \right| \leq b_0 \|u_m\|_{p,\Omega}^p \leq b_0 C_1 \left(\chi \|\nabla u\|_{2,\Omega}^2 + \|u\|_{2,\Omega}^2 \right)^{\frac{p}{2}}, \qquad (3.3.2)$$

$$\left| -\frac{\chi}{\sigma} \int_\Gamma k_t(x,t)|u_m|^\sigma d\Gamma \right| \leq \frac{\chi}{\sigma} \int_\Gamma \frac{|k_t(x,t)|}{k(x,t)} k(x,t)|u_m|^\sigma d\Gamma \leq$$

$$\leq K_1 \frac{\chi}{\sigma} \int_\Gamma k(x,t)|u_m|^\sigma d\Gamma, \qquad (3.3.3)$$

$$\left| \int_\Omega f \cdot u_m dx \right| \leq \|f\|_{2,\Omega} \|u_m\|_{2,\Omega} \leq \frac{1}{2}\|f\|_{2,\Omega}^2 + \frac{1}{2}\|u_m\|_{2,\Omega}^2 \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\|f\|_{2,\Omega}^2 + \frac{1}{2}\left(\chi \|\nabla u_m\|_{2,\Omega}^2 + \|u_m\|_{2,\Omega}^2 \right). \qquad (3.3.4)$$

Алынған (3.3.2) және (3.3.4) теңсіздіктерін (3.3.1) тепе-теңдігіне қойып, төмендегі теңсіздікке келеміз

$$\frac{dE}{dt} + a_0 \int_\Omega |\nabla u_m|^2 dx + a_1 \left(\int_\Omega |\nabla u_m|^2 dx \right)^q +$$

$$\left(a_0 + a_1 \|\nabla u_m\|_{2,\Omega}^{2q-2} \right) \int_\Gamma k(x,t)|u_m|^\sigma d\Gamma \leq C_2 E(t) + C_2 E(t)^{\frac{p}{2}} + \frac{1}{2}\|f\|_{2,\Omega}^2, \quad (2.3.5)$$

мұндағы $C_2 = max \left\{ \frac{K_1}{\sigma - 1}; 1 \right\}, C_3 = b_0 C_1$. Келесі функцияны енгіземіз:

$$z(t) = e^{-C_2 t} E(t).$$

Содан кейін (3.3.5) төмендегідей қайта жазамыз:

$$\frac{dz}{dt} \leq C_3 e^{C_2 \frac{p-2}{2} t} [\mathrm{z(t)}]^{\frac{p}{2}} + \frac{1}{2} e^{-C_3 t} \|f\|_{2,\Omega}^2.$$

Соңғы түрін 0-ден t-ға дейін интегралдап, келесі өрнекті аламыз:

$$\mathrm{z(t)} \leq \mathrm{z(0)} + C_3 \int_0^t e^{C_2 \frac{p-2}{2} s} \, [\mathrm{z(s)}]^{\frac{p}{2}} ds + \frac{1}{2} \int_0^t e^{-C_2 s} \, \|f\|_{2,\Omega}^2 ds.$$

Жоғарыдағы (3.1.4) шартын қолданып, сызықты емес интегралдық теңсіздікке келеміз:

$$\mathrm{z(t)} \leq \mathrm{z(0)} + \frac{c_0}{2C_2} + C_3 \int_0^t e^{C_2 \frac{p-2}{2} s} \, [\mathrm{z(s)}]^{\frac{p}{2}} ds.$$

Гронуолл Беллман-Бихари леммасын [49] қолданып, келесі бағалауға келеміз.

$$\mathrm{z(t)} \leq \frac{z(0) + \frac{c_0}{2C_2}}{\left[1 - \left(z(0) + \frac{c_0}{2C_2}\right)^{\frac{p-2}{2}} \frac{C_3}{C_2} \left(e^{C_2 \frac{p-2}{2} t} - 1\right)\right]^{\frac{2}{p-2}}},$$

Егер t теңсіздікті қанағаттандырса

$$\frac{C_3}{C_2}\left(e^{C_2 \frac{p-2}{2} t} - 1\right) < \frac{1}{\left(z(0) + \frac{c_0}{2C_2}\right)^{\frac{p-2}{2}}}, \qquad 0 \leq t \leq T,$$

яғни

$$t < T_0 = \frac{2}{C_2(p-2)} ln\left(1 + \frac{C_2}{C_3}\left(z(0) + \frac{C_0}{2C_2}\right)^{\frac{2-p}{2}}\right) := G\big(z(0)\big).$$

Осы бағалауларды қолдана отырып соңғы теңсіздікті аламыз:

$$\mathrm{E(t)} \leq \frac{\left(E(0) + \frac{c_0}{2C_2}\right) e^{C_2 t}}{\left[1 - \left(E(0) + \frac{c_0}{2C_2}\right)^{\frac{p-2}{2}} \frac{C_3}{C_2} \left(e^{C_2 \frac{p-2}{2} t} - 1\right)\right]^{\frac{2}{p-2}}}. \tag{3.3.6}$$

Осы бағалаудан $T_0 > 0$ табылады деп қорытынды жасай аламыз.

$$\frac{1}{2}\left(\|u_m\|_{2,\Omega}^2 + \chi \|\nabla u_m\|_{2,\Omega}^2\right) + \chi \frac{\sigma - 1}{\sigma} \int_\Gamma k(x,t) |u_m|^\sigma \, d\Gamma \leq C_4, \tag{3.3.7}$$

барлық $t \in [0,T]$ үшін, $T < T_0$, мұндағы C_4 – бұл $m \in N$ тәуелсіз, бірақ t -ға тәуелді тұрақты. (3.3.5) - ге оралып, (3.3.7)-ні ескере отырып, біз тағы бір теңсіздікті аламыз:

$$\int_0^T \left(\int_\Omega |\nabla u_m|^2 \, dx + \left(\int_\Omega |\nabla u_m|^2 \, dx \right)^q \right) dt +$$
$$+ \int_0^T \left(a_0 + a_1 \|\nabla u_m\|_{2,\Omega}^{2q-2} \right) \int_\Gamma k(x,t) |u_m|^\sigma \, d\Gamma dt \le C_5. \qquad (3.3.8)$$

Лемма 3.2. (Екінші локалді бағалау) (3.1.4) шарттары мен (3.3.7), (3.3.8) бағалаулары, сондай-ақ 1 Лемманың теңсіздіктері орындалсын, онда $u_m(x,t)$ функциялары келесі бағалауды қанағаттандырады:

$$\Lambda(t) \le C_6, t \in (0, T_0),$$

мұндағы

$$\Lambda(t) := \int_0^t \left(\int_\Omega (|\partial_t u_m|^2 + \chi |\partial_t \nabla u_m|^2) dx \right.$$
$$\left. + \chi(\sigma - 1) \int_\Gamma k(x,t) \, |u_m|^{\sigma-2} |\partial_t u_m|^2 d\Gamma \right) dt,$$

және C_6, $m \in N$ –ге тәуелсіз тұрақты.

Дәлелдеуі. Енді (3.2.1) теңдігін $C'_{mj}(t)$ көбейтеміз және $j = \overline{1,m}$ бойынша қосындылаймыз. Алынған τ өрнекті 0-ден t-ға дейін интегралдасақ, келесі қатынасқа келеміз:

$$\Lambda(t) + \frac{a_0}{2} ||\nabla u_m||_{2,\Omega}^2 + \frac{a_1}{2q} ||\nabla u_m||_{2,\Omega}^{2q} =$$
$$= \int_\Omega b(x,t) |u_m|^p dx - \frac{1}{p} \int_0^t \int_\Omega^1 b_\tau(x,t) |u_m|^p dx d\tau -$$
$$- \frac{1}{\sigma} \int_\Gamma (a_0 + a_1 ||\nabla u_m||_{2,\Omega}^{2q-2}) k(x,t) |u_m|^\sigma d\Gamma +$$
$$+ \frac{q-1}{\sigma} a_1 \int_0^t ||\nabla u_m||_{2,\Omega}^{2q-4} \int_\Omega \nabla u_m \, \nabla \partial_\tau u_m dx \int_\Gamma k(x,t) |u_m|^\sigma d\Gamma d\tau +$$
$$+ \frac{1}{\sigma} \int_0^t \left(a_0 + a_1 \|\nabla u_m\|_{2,\Omega}^{2q-2} \right) (\int_\Gamma k_\tau(x,t) |u_m|^\sigma d\Gamma d\tau -$$
$$- \frac{\chi}{\sigma} \int_\Gamma k_t(x,t) |u_m|^\sigma d\Gamma + \frac{\chi}{\sigma} \int_0^t \int_\Gamma k_{\tau\tau}(x,t) |u_m|^\sigma d\Gamma d\tau +$$
$$+ \int_0^t \int_\Omega f \, \partial_\tau u_m dx d\tau + \frac{a_0}{2} \|\nabla u_m(x,0)\|_{2,\Omega}^2 + \frac{a_1}{2q} \|\nabla u_m(x,0)\|_{2,\Omega}^{2q}$$
$$- \int_\Omega b(x,0) |u_m(x,0)|^p dx +$$

$$+\frac{1}{\sigma}\int_\Gamma \left(a_0+a_1\|\nabla u_m(x,0)\|_{2,\Omega}^2\right)k(x,0)|u_m(x,0)|^\sigma d\Gamma. \qquad (3.3.9)$$

(3.3.9) тепе-теңдігінің оң жағын бағалаймыз:

$$\left|\frac{1}{p}\int_\Omega b(x,t)|u_m|^p dx\right| \le \frac{b_0 C_1}{p}\left(\chi\|\nabla u\|_{2,\Omega}^2+\|u\|_{2,\Omega}^2\right)^{\frac{p}{2}} \le \frac{b_0 C_1}{p}\sqrt{C_4^p}. \qquad (2.3.10)$$

$$\left|\frac{1}{\sigma}\left(a_0+a_1\|\nabla u_m\|_{2,\Omega}^{2q-2}\right)\int_\Gamma k(x,t)|u_m|^\sigma d\Gamma\right| \le \frac{C_4\left(a_0+a_1C_4^{q-1}\right)}{\sigma}. \qquad (2.3.11)$$

$$\left|a_1\frac{q-1}{\sigma}\int_0^t\|\nabla u_m\|_{2,\Omega}^{2(q-2)}\int_\Omega \nabla u_m\nabla\partial_t u_m dx\int_\Gamma k(x,t)|u_m|^\sigma d\Gamma d\tau\right| \le$$

$$\le a_1\frac{q-1}{\sigma}\int_0^t\|\nabla u_m\|_{2,\Omega}^{2(q-2)}\|\nabla u_m\|_{2,\Omega}\|\nabla\partial_t u_m\|_{2,\Omega}\int_\Gamma k(x,t)|u_m|^\sigma d\Gamma d\tau \le$$

$$\le a_1\frac{q-1}{\sigma}C_4^{q-1}\int_0^t\|\nabla\partial_t u_m\|_{2,\Omega}d\tau \le \frac{\chi}{2}\int_0^t\|\nabla\partial_t u_m\|_{2,\Omega}^2 d\tau + a_1^2\frac{(q-1)^2}{2\chi\sigma^2}C_4^{2q-2}T.$$

$$\left|-\frac{\chi}{\sigma}\int_\Gamma k_t(x,t)|u_m|^\sigma d\Gamma+\frac{\chi}{\sigma}\int_0^t\int_\Gamma k_{\tau\tau}(x,t)|u_m|^\sigma d\Gamma d\tau\right| \le$$

$$\le \frac{\chi}{\sigma}\int_\Gamma \frac{|k_t(x,t)|}{k(x,t)}k(x,t)|u_m|^\sigma d\Gamma +$$

$$+\frac{\chi}{\sigma}\int_0^t\int_\Gamma \frac{k_{\tau\tau}(x,t)}{k(x,t)}k(x,t)|u_m|^\sigma d\Gamma d\tau \le \frac{\chi}{\sigma}K_1\int_\Gamma k(x,t)|u_m|^\sigma d\Gamma +$$

$$+\frac{\chi}{\sigma}K_2\int_0^t\int_\Gamma k(x,t)|u_m|^\sigma d\Gamma d\tau \le \frac{\chi}{\sigma}K_1C_4+\frac{\chi}{\sigma}K_2C_4T.$$

$$\left|\frac{1}{\sigma}\int_0^t\left(a_0+a_1\|\nabla u_m\|_{2,\Omega}^{2q-2}\right)\int_\Gamma k_\tau(x,t)|u_m|^\sigma d\Gamma d\tau\right| \le$$

$$\le \frac{1}{\sigma}\left(a_0+a_1C_4^{q-1}\right)\int_0^t\int_\Gamma \frac{|k_\tau(x,t)|}{k(x,\tau)}k(x,\tau)|u_m|^\sigma d\Gamma d\tau \le$$

$$\le \frac{K_1}{\sigma}\left(a_0+a_1C_4^{q-1}\right)C_4T.$$

$$\left|\frac{1}{p}\int_0^t\int_\Omega b_\tau(x,t)|u_m|^p dx d\tau\right| \le \frac{b_1}{p}\int_0^t\int_\Omega |u_m|^p dx d\tau \le \frac{b_1C_1}{p}\sqrt{C_4^p}\,t \le \frac{b_1C_1}{p}\sqrt{C_4^p}\,T.$$

$$\left|\int_0^t\int_\Omega f\partial_\tau u_m dx d\tau\right| \le \|f\|_{2,Q_t}\|\partial_\tau u_m\|_{2,Q_t} \le \frac{1}{2}\|f\|_{2,Q_t}^2+\frac{1}{2}\|\partial_\tau u_m\|_{2,Q_t}^2. \qquad (3.3.12)$$

Алынған теңсіздіктерді (3.3.9) тепе-теңдігіне қойып, біз келесі өрнекті аламыз:

$$\frac{1}{2}\int_0^t\int_\Omega \left(|\partial_\tau u_m|^2+\chi|\partial_\tau\nabla u_m|^2\right)dx d\tau+\frac{a_0}{2}\|\nabla u_m\|_{2,\Omega}^2+\frac{a_1}{2q}\|\nabla u_m\|_{2,\Omega}^{2q}+$$

$$+\chi(\sigma-1)\int_0^t\int_\Gamma k(x,t)|u_m|^{\sigma-2}|\partial_\tau u_m|^2 d\Gamma d\tau \le C_5.$$

Осылайша, келесі бағалаулар алынды:

$$\int_0^T \left(\int_\Omega (|\partial_t u_m|^2 + \chi |\partial_t \nabla u_m|^2)\, dx + \chi(\sigma - 1) \int_\Gamma k(x,t)|u_m|^{\sigma-2} |\partial_t u_m|^2 d\Gamma \right) dt \le C_6 \tag{3.3.13}$$

b<0 жағдайындағы уақыт бойынша глобалді бағалауы

Лемма 3.3. (2.1.4)–ке және $q > 1, p > 1$, σ>1 қосымша $b(x,t)$ мүшесі келесі шарттарды қанағатандырады деп айталық:

$$0 < b_0 \le -b(x,t) \le b_1 < \infty. \tag{3.3.14}$$

Онда барлық $t \in [0, T]$ үшін барлық Галеркин жуықтаулары үшін келесі бағалаулар орынды.

$$sup_{t\in[0,T]} Y(u_m(t), t) + \int_0^T \Lambda(u_m(t), t)dt \le 2e^{2T}\left(\|f\|^2_{2,Q_T} + Y(u(0), 0) + 1\right), \tag{3.3.15}$$

мұндағы

$$Y(u_m(t), t) := \left(\frac{1}{2}\left(\int_\Omega \left[|u_m(t)|^2 + \chi |\nabla u_m(t)|^2\right] dx\right) + \chi \frac{\sigma - 1}{\sigma} \int_\Gamma k(x,t)|u_m(t)|^\sigma d\Gamma\right) \ge 0,$$

$$\Lambda(u_m(t), t) := a_0 \int_\Omega |\nabla u_m|^2 dx + a_1 \left(\int_\Omega |\nabla u_m|^2 dx\right)^q + \int_\Omega b_0 |u_m|^p dx$$
$$+\left(a_0 + a_1 \|\nabla u_m\|^{2q-2}_{2,\Omega}\right) \int_\Gamma k(x,t)|u_m|^\sigma d\,\Gamma \ge 0.$$

Дәлелдеуі. (3.3.14), (3.1.4) және (3.3.1) қолдана отырып келесі теңсіздікті аламыз

$$\frac{d}{dt} Y(u_m(t), t) + \Lambda(u_m(t), t) \le \left|\int_\Omega f\, .\, u_m dx\right| \le \frac{1}{2}\int_\Omega f^2 dx + Y(u_m(t), t). \tag{3.3.16}$$

Соңғысын біріктіре отырып, біз келесі бағалауға келеміз:

$$Y(u_m(t), t) + \int_0^t e^{-s} \Lambda(u_m(s), s) ds \le e^T\left(Y(u_m(0), 0) + \|f\|^2_{2,Q_T}\right) \le e^T(Y(u(0), 0) + \|f\|^2_{2,Q_T} + 1). \tag{3.3.17}$$

Бұл теңсіздіктен келесі өрнекті аламыз:

$$sup_{t\in[0,T]} Y(u_m(t), t) + \int_0^T \Lambda(u_m(t), t)dt \le 2e^{2T}\left(\|f\|^2_{2,Q_T} + Y(u(0), 0) + 1\right). \tag{3.3.18}$$

(3.3.15) бағалауы дәлелденді.

Енді (3.3.19) шарттары бойынша екінші глобалді бағалауды дәлелдеп көрейік.

b>0 жағдайындағы уақыт бойынша глобалді бағалауы

b>0 болған жағдайдағы бірінші глобалді бағалау. Енді келесі өрнектер орынды болсын деп болжаймыз:

$$p \le \sigma, p < 2q, p \le \tfrac{2(n-1)}{n-2}, 0 < k_0 \le k(x,t). \qquad (3.3.19)$$

Лемма 3.4. (Ω аймағында бірінші уақыт бойынша глобалді бағалауы, яғни $b > 0$ және шекарадағы абсорбацияның бар болуы, яғни $k > 0$). (3.1.4)-ке қосымша (3.3.19) шарттары да орындалады деп есептейік. Содан кейін барлық m және кез келген ақырлы T үшін келесі бағалаулар орынды:

$$E(t) \le C_7, for\ all\ t \in [0,T], \qquad (3.3.20)$$

$$\int_0^t \left(\int_\Omega |\nabla u_m(t)|^2 dx + \left(\int_0^t |\nabla u_m(t)|^2 dx\right)^q\right) dt +$$
$$+\int_0^t \left(a_0 + a_1 \|\nabla u_m\|_{2,\Omega}^{2q-2}\right) \int_\Gamma k(x,t)|u_m|^\sigma d\Gamma dt \le \mathrm{C}_8, \qquad (3.3.21)$$

мұндағы C_7 , C_8 тұрақтылары $m \in N$ -ге тәуелді емес, бірақ T -ға тәуелді.

Дәлелдеуі. Ең алдымен кез келген $u(x) \in W_2^1(\Omega) = H^1(\Omega)$ функциясының презентациясын аламыз. [12]-ң 71 бетіндегі (7.12) формуласына сәйкес кез-келген $u(x) \in W_2^1(\Omega) = H^1(\Omega)$ функциясы келесі формула арқылы өрнектеле алады.

$$u(x) = u_0 + Q(\nabla u, x), \qquad (3.3.22)$$

мұндағы

$$Q(\nabla u, x) = \int_\Omega \sum_{k=1}^{n} \tfrac{\varpi_k(y)}{r^{N-1}} \tfrac{\partial u(y)}{\partial y_k} dy, r = |x-y|,$$

$\varpi_k, k = 1, \dots, n,$ жатық функциялар және u_0 тұрақты. Соңғы өрнектің екі жағын да Γ бойынша интегралдап келесі өрнекті аламыз:

$$u_0 = \tfrac{1}{|\Gamma|}\left(\int_\Gamma u d\Gamma - \int_\Gamma Q(\nabla u, x) d\Gamma\right). \qquad (3.3.23)$$

Сәйкесінше келесі формулаға келеміз:

$$u(x) = \tfrac{1}{|\Gamma|}\left(\int_\Gamma u d\,\Gamma - \int_\Gamma Q(\nabla u, x) d\Gamma\right) + Q(\nabla u, x). \qquad (3.3.24)$$

Соңғы теңдіктің екі жағын да р дәрежесіне шығарамыз және Ω аймағы бойынша интегралдаймыз. Содан кейін келесі бағалауға келеміз:

$$\int_\Omega |u(x)|^p dx \le C\left(\left(\int_\Gamma |u| d\Gamma\right)^p + \left|\int_\Gamma Q(\nabla u, x) d\Gamma\right|^p + \left|\int_\Omega Q(\nabla u, x)\right|^p d\Omega\right), \quad (3.3.25)$$

мұндағы $C = C(|\Gamma|, |\Omega|, p, n)$. Интегралдық операторлардың қасиеттерін және енгізу теоремасын қолдана отырып

$$\left|\int_\Gamma Q(\nabla u, x) d\Gamma\right|^p \le C\left(\|\nabla u\|_{2,\Omega}^2\right)^{\frac{p}{2}}, p \le \tfrac{2(n-1)}{n-2}, \quad (3.3.26)$$

$$\int_\Omega \left|\int_\Omega Q(\nabla u, x) d\Omega\right|^p d\Omega \le C\left(\|\nabla u\|_{2,\Omega}^2\right)^{\frac{p}{2}}, p \le \tfrac{2n}{n-2}, \quad (3.3.27)$$

келесі өрнекті бағалаймыз:

$$\int_\Omega |u(x)|^p dx \le C\left(\left(\int_\Gamma |u| d\Gamma\right)^p + (\|\nabla u\|_{2,\Omega}^2)^{\frac{p}{2}}\right). \quad (3.3.28)$$

Содан кейін (3.3.24)-(3.3.28) біріктіріп және төмендегі теңсіздіктерді қолдана отырып

$$\left(\int_\Gamma |u| d\Gamma\right)^p \le C\left(\int_\Gamma |u|^\sigma d\Gamma + 1\right), C = C(k_0, \sigma, p), p \le \sigma,$$
$$\left(\|\nabla u\|_{2,\Omega}^2\right)^{\frac{p}{2}} \le \delta\left(\|\nabla u\|_{2,\Omega}^2\right)^q + C(\delta), \delta \in (0,1), p < 2q$$

және (3.3.19), (3.1.4) шарттарын ескере отырып, (3.3.28)-ді келесі түрде қайта жазамыз:

$$\int_\Omega b|u(x)|^p dx \le C\left(\int_\Gamma k|u|^\sigma d\,\Gamma + 1\right) + \delta\left(\|\nabla u\|_{2,\Omega}^2\right)^q + C(\delta), \delta \in (0,1),\ p < 2q, \quad (3.3.29)$$

мұндағы $C = C(p, b_1, k_0, \sigma, q, \delta)$. (3.3.2)-(3.3.3) –ке ұқсас δ -ны a_1 –мен салыстырғанда жеткілікті кіші етіп таңдап төмендегі теңсіздікті аламыз.

$$\frac{dE}{dt} + a_0\int_\Omega |\nabla u_m|^2 dx + a_1\left(\int_\Omega |\nabla u_m|^2 dx\right)^q + (a_0 + a_1\|\nabla u_m\|_{2,\Omega}^{2q-2})\int_\Gamma k(x,t)|u_m|^\sigma d\Gamma \le$$
$$\le \mathrm{C}(E(t) + \|f\|_{2,\Omega}^2 + 1), \quad (3.3.30)$$

Соңғы теңсіздікті интегралдау лемманы дәлелдеуді аяқтайды.

Лемма 3.5. ((3.3.19) шарты бойынша екінші глобалді бағалау) (Ω аймағындағы екінші уақыт бойынша глобалді бағалауы, яғни b>0 және шекарадағы абсорбацияның бар болуы, яғни k>0).

(3.1.4)-ке қосымша (3.3.19) шарттары орындалады деп есептейік. Содан кейін барлық m және кез келген ақырлы T үшін келесі бағалаулар орынды:

$$\Lambda(t) \leq C_9,\ t \in [0, T], \tag{3.3.31}$$

мұндағы

$$\Lambda(t) := \int_0^t \left(\int_\Omega (|\partial_t u_m|^2 + \chi |\partial_t u_m|^2) dx \right.$$

$$\left. + \chi(\sigma - 1) \int_\Gamma k(x,t) |u_m|^{\sigma-2} |\partial_t u_m|^2 d\Gamma \right) dt,$$

мұндағы C_9 тұрақтысы $m \in N$ –ге тәуелді емес, бірақ T-ға тәуелді.

Дәлелдеуі. $\int_\Omega b|u_m|^\sigma$ мәнің бағалау үшін (3.3.9), (3.3.10)-(3.3.12) қатынастарын және (3.3.29) теңсіздігін қолданамыз. 4 Лемманы ескере отырып, (3.3.11)-(3.3.12) бағалаулары толығымен ұқсас әдіспен жүзеге асырылады, бірақ кез келген бекітілген уақыт моменті үшін 4 Лемманың дәлелдеу жолдарын қайталау дәлелдеуді аяқтайды.

3.4 $m \to \infty$ жағдайдағы шекке көшу. Локалді және глобалді бар болу теоремалары

3.1, 3.2 леммалардан (уақыт бойынша локалді) және 3.3-3.5 леммалардан (уақыт бойынша глобалді) алынған бағалаулар келесі қорытындыларды жасауға мүмкіндік береді. Бұл жердегі $T < T_0$ локалді бағалаулар жағдайында және T – глобалді бағалаулар жағдайында алынған кез-келген ақырлы сан

u_m шенелген $L_\infty\big(0, T; H^1(\Omega)\big)$ кеңістігінде, (3.4.1)

u_m' шенелген $L_2\big(0, T; H^1(\Omega)\big)$ кеңістігінде, (3.4.2)

$k(x,t)|u_m|^{\sigma-2}u_m$ шенелген $L_\infty\big(0, T; L_{\sigma'}(\Gamma)\big)$ кеңістігінде,

$$\sigma' = \tfrac{\sigma}{\sigma-1} > 1. \tag{3.4.3}$$

Сонымен қатар, p -ға қойылған шарттарға байланысты:

$|u_m|^{p-2}u_m$ шенелген $L_\infty\left(0, T; L_{\frac{p}{p-1}}(\Omega)\right)$ кеңістігінде,

$$2 < p < \tfrac{2n}{n-2}, n \geq 3. \tag{3.4.4}$$

(3.4.1)-ден u_m тізбегінің қандай да бір $u_m \in L_\infty\big(0,T;H^1(\Omega)\big)$ элементіне әлсіз жинақталатын u_{m_k} тізбекшесі бар деген тұжырым шығады, яғни

$$u_{m_k} \to u_m\text{*-әлсіз } L_\infty\big(0,T;H^1(\Omega)\big) \text{ кеңістігінде.}$$

Сол сияқты, (3.4.2)-(3.4.4) –ден $\{u_{m_k}\} \subset \{u_m\}$ тізбегінің бар екендігі шығады, дәл солай $u'_{m_k} \to u'$ шенелген $L_2\big(0,T;H^1(\Omega)\big)$ кеңістігінде. Соболев теоремасы бойынша $W_2^1(Q_T) \in L_m(Q_T)$, m $\leq \frac{2(n+1)}{n-1}$. Бұл енгізу компактілі, егер $m < \frac{2(n+1)}{n-1}$. Реллих- Кондрашов теоремасы бойынша $W_2^1(Q_T)$-ң $L_2(Q_T)$-ге енгізілуі компактілі. Бұл дегеніміз, $L_2(Q_T)$ нормасында u_m тізбегін $u_{m_k} \to$ u жинақталатындай етіп таңдап алуға болады, демек, барлық жерде дерлік жинақталады. ([50] қараңыз, теорема 16.1, 123 бет.) (3.4.3)-тен келесі өрнек шығады

$$k(x,t)|u_m|^{\sigma-2}u_m \in L_\infty\big(0,T;L_{\sigma'}(\Gamma)\big),\ \sigma' = \tfrac{\sigma}{\sigma-1} > 1 \text{ және } (0,T)$$

интервалының барлық жерінде дерлік жинақталады.

$L_2\big(0,T;L_{\sigma'}(\Gamma)\big), \sigma' = \frac{\sigma}{\sigma-1} > 1$ кеңістігінде $\sqrt{k(x,t)|u_m|^{\sigma-2}u_m}$-ң шектеулігінен осы кеңістікте қандай-да бір $\chi(x,t)$ функциясының $k(x,t)\big|u_{m_k}\big|^{\sigma-2}u_{m_k}$ тізбекшесінің әлсіз жинақтылығы шығады. [41] –де дәлелденген Лемма 1.3 арқылы келесі өрнек шығады:

$$\chi(x,t) = k(x,t)|u|^{\sigma-2}u.$$

Ескерту 3.1. $\|\nabla u_i(t)\|_{2,\Omega}^2$ нормаларының жинақтылығы және ∇u_i күшті жинақтылығы. Төмендегі функциялар тізбегін қарастырайық:

$$I_i(t) := \|\nabla u_i(t)\|_{2,\Omega}^2,\ t \in [0,T]. \qquad (3.4.5)$$

3.1 және 3.2 Леммалар бойынша және (3.3.20), (3.3.21) бағалаулары бойынша (локалді жағдайда), сонымен қатар 3.4 және 3.5 Леммалары бойынша және (3.3.31) бағалауы бойынша (глобалді жағдайда) бұл тізбек біркелкі шектелген және оған қоса келесі теңсіздік орынды:

$$\int_0^T \left|\frac{dI_i(t)}{dt}\right|^2 dt \leq 4 \sup_{t\in[0,T]} \|\nabla u_i(t)\|_{2,\Omega}^2, \|\nabla u_{it}\|_{2,Q_T}^2 \leq C. \qquad (3.4.6)$$

Демек, осыдан шығатыны:

$$\|\nabla u_i(t) - \nabla u_i(\tau)\|_{2,\Omega} \leq \int_\tau^t \|\nabla u_{is}\|_{2,\Omega}\, ds \leq C|t-\tau|^{\frac{1}{2}}. \qquad (3.4.7)$$

Сонымен, әрбір $0 < \alpha < ½$ үшін $I_i(t)$ тізбегі $C^{\alpha}[0,T]$ кеңістігінде компактілі. Сондықтан, $C^{\alpha}[0,T]$ кеңістігінде жинақталатын $I_{i_m}(t) = \left\|\nabla u_{i_m}(t)\right\|_{2,\Omega}^2$ тізбекшесін бөліп аламыз. $L_2(Q_t)$ кеңістігінде $\nabla u(x,t)$ -ға әлсіз жинақталатын сәйкес $\nabla u_{i_m}(x,t)$ (бұдан әрі біз алдыңғы $\nabla u_i(x,t)$ белгілеуін сақтаймыз) тізбекшесінің де күшті жинақталатындығын көрсетеміз. Келесі формуланы қолданамыз:

$$\int_{Q_T} |\nabla u - \nabla u_i|^2\, dx\, dt = \|\nabla u_i\|_{2,Q_T}^2 - \|\nabla u\|_{2,Q_T}^2 + 2\int_{Q_T} (\nabla u - \nabla u_i)\nabla u dx dt. \tag{2.4.8}$$

мұндағы

$$\|\nabla u_i\|_{2,Q_T}^2 - \|\nabla u\|_{2,Q_T}^2 \to 0,$$

нормалардың жинақтылығының және әлсіз шешімнің анықтамасының көмегімен

$$2\int_{Q_T} (\nabla u - \nabla u_i)\nabla u dx dt \to 0.$$

Жоғарыда айтылған тұжырымдар (3.2.1)-де шекке көшуге мүмкіндік береді. Бірақ алдымен, (3.2.1) –гі теңдіктердің әрқайсысын $d_j(t) \epsilon C[0,T]$ –ға көбейтеміз және алынған теңдеудің екі жағын $j = \overline{1,m}$ бойынша қосындылаймыз. Содан кейін, t айнымалысы бойынша 0-ден T –ға дейін интегралдап келесі интегралдық өрнекті аламыз:

$$\int_0^T \int_\Omega \left(\frac{\partial u_m}{\partial t}\mu + \chi \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u_m}{\partial t \partial x_i}\frac{\partial \mu}{\partial x_i} + \left(a_0 + a_1 \|\nabla u_m\|_{2,\Omega}^{2q-2}\right) \sum_{i=1}^n \frac{\partial u_m}{\partial x_i}\frac{\partial \mu}{\partial x_i} \right) dx dt -$$

$$- \int_0^T \int_\Omega b(x,t)|u_m|^{p-2} u_m \mu dx dt +$$

$$\int_0^T \int_\Gamma \left(\left(a_0 + a_1 \|\nabla u_m\|_{2,\Omega}^{2q-2}\right) k(x,t)|u_m|^{\sigma-2} u_m + \chi k_t(x,t)|u_m|^{\sigma-2} u_m \right) \mu d\Gamma dt +$$

$$+\chi(\sigma-1)\int_0^T \int_\Gamma k(x,t)|u_m|^{\sigma-2} u_{mt} \mu d\Gamma dt = \int_0^T \int_\Omega f \mu dx dt, \tag{2.4.9}$$

мұндағы $\mu(x,t) = \sum_{j=1}^m d_j(t)\Psi_j(x)$. Алынған қосындылар мен жинақтылықтарды ескере отырып (2.4.9) –да $m \to \infty$ бойынша шекке көшеміз және $\varphi(t)\upsilon(x) = \mu(x,t)$ теңдігі үшін (2.1.5) –ті аламыз. Барлық $\mu(x,t)$ функциялар жиыны $W_2^1(0,T;\, W_2^1(\Omega))$-да тығыз болғандықтан, онда шектік қатынас барлық $\upsilon(x,t) \in L_2\big(0,T;\, W_2^1(\Omega)\big) \cap L_\sigma(\Gamma)$ үшін орындалады. Содан кейін келесі теоремаларды тұжырымдаймыз.

Теорема 3.1. (Локалді бар болуы) (3.1.4) шарттары орындалсын, сондай-ақ $2 < \mathrm{p} < \frac{2\mathrm{n}}{\mathrm{n}-2}, \mathrm{n} \geq 3, \mathrm{q} > 1, 2 < \sigma < \frac{2(\mathrm{n}-1)}{\mathrm{n}-2}$. Онда $(0, T)$, $\mathrm{T} < \mathrm{T}_0$ интервалында (3.1.1)-(3.1.3) есебінің әлсіз жалпылама $u(x,t)$ шешімі бар болады.

Теорема 3.2. (Глобалді бар болуы) Лемма 3.3. (немесе Лемма 3.4) шарттары және сәйкесінше (3.3.14), (3.3.15) (немесе (3.3.20), (3.3.21)) бағалаулары орындалсын. Сонда (3.1.1)-(3.1.3) есебінің $u(x,t)$ шешімі кез келген ақырлы $T < \infty$ уақыт интервалында бар болады.

3.5 Әлсіз жалпылама шешімнің жалғыздығы

Теорема 3.3. Төмендегі теңсіздіктер орындалсын деп тұжырымдайық:

$$2 \leq \sigma \leq 2 + \frac{2}{n-2}, 2 \leq p \leq 2 + \frac{2}{n-2}, n \geq 3, q > 2.$$

Онда (3.1.1)-(3.1.3) есебінің әлсіз жалпылама шешімі $u \in W_2^1\big(0, T;\ W_2^1(\Omega)\big) \cap L_\sigma(\Gamma)$ (0,T) интервалында жалғыз болады.

Дәлелдеуі. (3.1.1)-(3.1.3) есебінің $u_1(x,t)$ және $u_2(x,t)$ екі шешімі бар деп ұйғарайық. Онда олардың $u(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$ айырмасы $u(x,0) = 0$ шартын қанағаттандырады. (3.1.5) теңдігінде $\varphi(t) = 1$ алайық. Сонда біз барлық дерлік t үшін келесі теңдікке ие боламыз:

$$\int_0^t \int_\Omega \Big(\frac{\partial u(x,\tau)}{\partial t} \upsilon(x,\tau) + \chi \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial \tau \partial x_i} \frac{\partial \upsilon}{\partial x_i}\Big)\, dx d\tau$$

$$+ a_0 \int_0^t \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \upsilon}{\partial x_i}\right) dx d\tau + a_1 \int_0^t \Big(\|\nabla u_1\|_{2,\Omega}^{2q-2} \int_\Omega \sum_{i=1}^n \frac{\partial u_1}{\partial x_i} \frac{\partial \upsilon}{\partial x_i} dx$$

$$- \|\nabla u_2\|_{2,\Omega}^{2q-2} \int_\Omega \sum_{i=1}^n \frac{\partial u_2}{\partial x_i} \frac{\partial \upsilon}{\partial x_i} dx\Big)\ d\tau$$

$$- \int_0^t \int_\Omega b(x,\tau)\, (|u_1|^{p-2} u_1 - |u_1|^{p-2} u_1)\, \upsilon dx d\tau$$

$$+ a_0 \int_0^t \int_\Gamma k(x,\tau) (|u_1|^{\sigma-2} u_1 - |u_2|^{\sigma-2} u_2)\, \upsilon d\Gamma d\tau +$$

$$+ a_1 \int_0^t \int_\Gamma k(x,\tau) \big(|u_1|^{\sigma-2} u_1 \|\nabla u_1\|_{2,\Omega}^{2q-2} - |u_2|^{\sigma-2} u_2 \|\nabla u_2\|_{2,\Omega}^{2q-2}\big) \upsilon d\Gamma d\tau$$

$$+ \chi \int_0^t \int_\Gamma k_\tau(x,\tau)\, (|u_1|^{\sigma-2} u_1 - |u_2|^{\sigma-2} u_2)\, \upsilon d\Gamma d\tau +$$

$$+\chi \int_0^t \int_\Gamma \; k_\tau(x,\tau)\,(|u_1|^{\sigma-2}u_1 - |u_2|^{\sigma-2}u_2)\, vd\Gamma d\tau$$

$$+\,\chi(\sigma-1)\int_0^t \int_\Gamma \; k(x,\tau)(|u_1|^{\sigma-2}\partial_\tau u_1 - |u_1|^{\sigma-2}\partial_\tau u_1)\, vd\Gamma d\tau = 0.$$

Бұл төмендегіні білдіреді:

$$\int_\Omega \left(uv + \chi\sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)dx + a_0\int_0^t\int_\Omega \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)dxd\tau +$$
$$+\,a_1\int_0^t \Bigg(\|\nabla u_1\|_{2,\Omega}^{2q-2}\int_\Omega \sum_{i=1}^n \frac{\partial u_1}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}dx$$
$$-\,\|\nabla u_2\|_{2,\Omega}^{2q-2}\int_\Omega \sum_{i=1}^n \frac{\partial u_2}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}dx\Bigg)d\tau$$
$$-\int_0^t\int_\Omega \; b(x,\tau)(|u_1|^{p-2}u_1 - |u_1|^{p-2}u_1)vdxd\tau$$
$$+\,a_0\int_0^t\int_\Gamma \; k(x,\tau)(|u_1|^{\sigma-2}u_1 - |u_2|^{\sigma-2}u_2)vd\Gamma d\tau$$
$$+\;a_1\int_0^t\int_\Gamma \; k(x,\tau)\big(|u_1|^{\sigma-2}u_1\|\nabla u_1\|_{2,\Omega}^{2q-2}$$
$$-\,|u_2|^{\sigma-2}u_2\|\nabla u_2\|_{2,\Omega}^{2q-2}\big)vd\Gamma d\tau + \chi\int_\Gamma \; k(x,t)\,(|u_1|^{\sigma-2}u_1$$
$$-\,{u_1}^{\sigma-2}u_1)vd\Gamma = 0.$$

Енді $v(x) = u(x,t)$ деп аламыз. Содан кейін алатынымыз:

$$\int_\Omega (|u(x,t)|^2 + \chi|\nabla u(x,t)|^2)\; dx + \chi\int_\Gamma \; k(x,t)(|u_1|^{\sigma-2}u_1 -$$
$$-|u_1|^{\sigma-2}u_1)u(x,t)d\Gamma \; + a_0\int_0^t\int_\Omega \; \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_i}\right)dxd\tau +$$
$$a_1\int_0^t\left(\|\nabla u_1\|_{2,\Omega}^{2q-2}\int_\Omega \sum_{i=1}^n \frac{\partial u_1}{\partial x_i}\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_i}dx - \;\|\nabla u_2\|_{2,\Omega}^{2q-2}\int_\Omega \sum_{i=1}^n \frac{\partial u_2}{\partial x_i}\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_i}dx\right)d\tau -$$
$$\int_0^t\int_\Omega \; b(x,\tau)(|u_1|^{p-2}u_1 - |u_1|^{p-2}u_1)\,u(x,t)dxd\tau -$$
$$+\,a_0\int_0^t\int_\Gamma \; k(x,\tau)\,(|u_1|^{\sigma-2}u_1 - |u_2|^{\sigma-2}u_2)u(x,t)d\Gamma d\tau +$$
$$a_1\int_0^t\int_\Gamma \; k(x,\tau)\big(|u_1|^{\sigma-2}u_1\|\nabla u_1\|_{2,\Omega}^{2q-2} - |u_2|^{\sigma-2}u_2\|\nabla u_2\|_{2,\Omega}^{2q-2}\big)u(x,t)d\Gamma d\tau = 0. \tag{3.5.1}$$

Төмендегі теңсіздіктерді қолданамыз:

$$||u_1|^q u_1 - |u_2|^q u_2| \le (q+1)(|u_1|^q + |u_2|^q)|u_1 - u_2|\;, q > 0,$$

$$|(|u_1{}^q|u_1 - |u_2|^q u_2)\,(u_1 - u_2)| \geq |u_1 - u_2|^{q+2}\,, \qquad q > 0,$$

$$||u_1|^q - |u_2|^q| \geq |u_1 - u_2|^q\,, \qquad q > 0,$$

$$\left|\int_\Gamma\ k(x,\tau)(|u_1|^{\sigma-2}u_1 - |u_2|^{\sigma-2}u_2)ud\Gamma\right| \geq \int_\Gamma\ k(x,\tau)|u|^\sigma d\Gamma,$$

келесі бағалауларды аламыз:

$$\left|a_1\int_0^t\int_\Gamma\ k(x,\tau)(|u_1(\tau)|^{\sigma-2}u_1(\tau)\|\nabla u_1(\tau)\|_{2,\Omega}^{2q-2}\right.$$
$$\left. - |u_2(\tau)|^{\sigma-2}u_2(\tau)\,\|\nabla u_2(\tau)\|_{2,\Omega}^{2q-2})\,u(t)d\Gamma d\tau\right| \leq$$
$$\leq\ a_1\left|\int_0^t\int_\Gamma\ k(x,\tau)\big(|u_1(\tau)|^{\sigma-2}u_1(\tau)\right.$$
$$\left. -\ |u_2(\tau)|^{\sigma-2}u_2(\tau)\big)\,\|\nabla u_1\|_{2,\Omega}^{2q-2}u(t)d\Gamma d\tau\right|$$
$$+\, a_1\left|\int_0^t\int_\Gamma\ k(x,\tau)\,\big(\|\nabla u_1(\tau)\|_{2,\Omega}^{2q-2}\right.$$
$$\left. - \|\nabla u_2(\tau)\|_{2,\Omega}^{2q-2}\big)|u_2(\tau)|^{\sigma-2}u_2(\tau)u(t)d\Gamma d\tau\right|,$$

$$\int_0^t\left(\|\nabla u_1(\tau)\|_{2,\Omega}^{2q-2}\int_\Omega\ \sum_{i=1}^n\frac{\partial u_1(\tau)}{\partial x_i}\frac{\partial u(t)}{\partial x_i}dx\right.$$
$$\left. - \|\nabla u_2(\tau)\|_{2,\Omega}^{2q-2}\int_\Omega\ \sum_{i=1}^n\frac{\partial u_2(\tau)}{\partial x_i}\frac{\partial u(t)}{\partial x_i}dx\right)d\tau$$
$$= \int_0^t\|\nabla u_1(\tau)\|_{2,\Omega}^{2q-2}\int_\Omega\ \sum_{i=1}^n\frac{\partial u(\tau)}{\partial x_i}\frac{\partial u(t)}{\partial x_i}dxd\tau$$
$$+ \int_0^t\big(\|\nabla u_1(\tau)\|_{2,\Omega}^{2q-2} - \|\nabla u_2(\tau)\|_{2,\Omega}^{2q-2}\big)\int_\Omega\ \sum_{i=1}^n\frac{\partial u_2(\tau)}{\partial x_i}\frac{\partial u(t)}{\partial x_i}dxd\tau$$
$$\leq C_1\|\nabla u(t)\|_{2,\Omega}\int_0^t\|\nabla u(\tau)\|_{2,\Omega}d\tau + C_2\|\nabla u(t)\|_{2,\Omega}\int_0^t\|\nabla u(\tau)\|_{2,\Omega}d\tau,$$
$$\int_0^t\big(\|\nabla u_1(\tau)\|_{2,\Omega}^{2q-2} - \|\nabla u_2(\tau)\|_{2,\Omega}^{2q-2}\big)\int_\Omega\sum_{i=1}^n\frac{\partial u_2(\tau)}{\partial x_i}\frac{\partial u(t)}{\partial x_i}dxd\tau \leq$$
$$\leq \int_0^t\big(\|\nabla u_1(\tau)\|_{2,\Omega}^{2q-4} + \|\nabla u_2(\tau)\|_{2,\Omega}^{2q-4}\big)\int_\Omega\ (|\nabla u_1(\tau)|^2 - |\nabla u_2(\tau)|^2)\,dx$$
$$\|\nabla u_2(\tau)\|_{2,\Omega}\|\nabla u(t)\|_{2,\Omega}d\tau \leq$$

$$\leq C_2'\|\nabla u(t)\|_{2,\Omega}\int_0^t \|\nabla u(\tau)\|_{2,\Omega}\|\nabla u_1(\tau)+\nabla u_2(\tau)\|_{2,\Omega}dx \leq$$

$$\leq C_2\|\nabla u(t)\|_{2,\Omega}\int_0^t \|\nabla u(\tau)\|_{2,\Omega}\, d\tau.$$

Сонда (3.5.1)-ді келесі түрде жазуға болады:

$$\int_\Omega \left(|u(x,t)|^2+\chi|\nabla u(x,t)|^2\right)dx+\chi\int_\Gamma k(x,t)\,|u(x,t)|^\sigma\, d\Gamma \leq a_0\|\nabla u(t)\|_{2,\Omega}\int_0^t\|\nabla u(\tau)\|_{2,\Omega}d\tau+ a_1C_1\|\nabla u(t)\|_{2,\Omega}\int_0^t\|\nabla u(\tau)\|_{2,\Omega}d\tau+ a_1C_2\|\nabla u(t)\|_{2,\Omega}\int_0^t\|\nabla u(\tau)\|_{2,\Omega}d\tau+b_1(p-1)\int_0^t\int_\Omega (|u_1|^{p-2}+ +|u_2|^{p-2})u(\tau)u(t)dxd\tau+a_0(\sigma-1)\int_0^t\int_\Gamma k(x,\tau)\,(|u_1|^{\sigma-2}+ |u_2|^{\sigma-2})\,u(\tau)u(t)d\Gamma d\tau+a_1\left|\int_0^t\int_\Gamma k(x,\tau)\,(|u_1(\tau)|^{\sigma-2}u_1(\tau)- |u_2(\tau)|^{\sigma-2}u_2\,(\tau))\,\|\nabla u_1\|_{2,\Omega}^{2q-2}u(t)d\Gamma d\tau\right|+ +a_1\left|\int_0^t\int_\Gamma k(x,\tau)\left(\|\nabla u_1(\tau)\|_{2,\Omega}^{2q-2}- \|\nabla u_2(\tau)\|_{2,\Omega}^{2q-2}\right)|u_2(\tau)|^{\sigma-2}u_2(\tau)u(t)d\Gamma d\tau\right|. \tag{3.5.2}$$

$y^2(t)=\int_\Omega \left(|u(x,t)|^2+\chi|\nabla u(x,t)|^2\right)dx$ деп белгілеп аламыз. Гельдер мен Минковский теңсіздігін пайдаланып (3.5.2) теңсіздігінің оң жағын бағалаймыз.

$$\left|\int_\Omega b(x,\tau)(|u_1(\tau)|^{p-2}u_1(\tau)-|u_2(\tau)|^{p-2}u_2(\tau))\,u(\tau)dx\right|$$

$$\leq b_1(p-1)\int_\Omega (|u_1(\tau)|^{p-2}+|u_2(\tau)|^{p-2})\,u(\tau)u(t)dx \leq$$

$$\leq b_1(p-1)\left(\int_\Omega (|u_1|^{p-2}+|u_2|^{p-2})^2\,u^2(\tau)dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega u^2(t)dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq b_1(p-1)\left(\int_\Omega (|u_1|^{p-2}+|u_2|^{p-2})^{\frac{2r}{r-2}}dx\right)^{\frac{r-2}{2r}}$$

$$\left(\int_\Omega u^r(\tau)dx\right)^{\frac{1}{r}}\left(\int_\Omega u^2(t)dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq b_1(p-1)\left(\left(\int_\Omega |u_1|^{\frac{2r(p-2)}{r-2}}dx\right)^{\frac{r-2}{2r}}+\left(\int_\Omega |u_2|^{\frac{2r(p-2)}{r-2}}dx\right)^{\frac{r-2}{2r}}\right)\times$$

$$\times\left(\int_\Omega u^r(\tau)dx\right)^{\frac{1}{r}}\left(\int_\Omega u^2(t)dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

$r=\frac{2n}{n-2}, p\leq 2+\frac{2}{n-2}, n\geq 3$ деп аламыз. Содан кейін, Соболев енгізу теоремасы бойынша: $H^1(\Omega)\subset L_1(\Omega)$ және $H^1(\Omega)\subset L_{\frac{2r(p-2)}{r-2}}(\Omega)$. Бұл жағдайда $u_1(x,t)$ және $u_2(x,t)$ шешімдерінің жатық класын ескере отырып, біз төмендегі бағалауды аламыз:

$$\left|\int_0^t\int_\Omega b(x,\tau)\ (|u_1|^{p-2}u_1-|u_2|^{p-2}u_2)\,u(t)dxd\tau\right|\leq$$
$$C_3\|u(t)\|_{2,\Omega}\int_0^t\|u(\tau)\|_{r,\Omega}d\tau\leq C_3y(t)\int_0^t y(\tau)\,d\tau, C_3=$$
$$C_3\left(b_1,p,|\Omega|,sup_{t\in(0,T)}\int_\Omega|\nabla u_i(t)|^2dx\right), i=1,2. \qquad (3.5.3)$$

Енді $\int_\Gamma k(x,\tau)\,(|u_1|^{\sigma-2}+|u_2|^{\sigma-2})\,u(\tau)\,u(t)d\Gamma$ қосындысын бағалайық.

$$\chi a_0(\sigma-1)\int_\Gamma k(x,\tau)(|u_1|^{\sigma-2}+|u_2|^{\sigma-2})\,u(\tau)\,u(t)d\Gamma\leq$$
$$\leq\chi a_0(\sigma-1)K_1\int_\Gamma(|u_1(\tau)|^{\sigma-2}+|u_2(\tau)|^{\sigma-2})u(\tau)u(t)dx\leq$$
$$\leq\chi a_0(\sigma-1)K_1\left(\int_\Gamma(|u_1|^{\sigma-2}+|u_2|^{\sigma-2})^2\,u^2(\tau)dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Gamma u^2(t)dx\right)^{\frac{1}{2}}\leq$$
$$\leq\chi a_0(\sigma-1)K_1\left(\int_\Gamma(|u_1|^{\sigma-2}\right.$$
$$\left.+|u_2|^{\sigma-2})^{\frac{2r}{r-2}}dx\right)^{\frac{r-2}{2r}}\left(\int_\Gamma u^r(\tau)dx\right)^{\frac{1}{r}}\left(\int_\Gamma u^2(t)dx\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\leq\chi a_0(\sigma-1)K_1\left(\left(\int_\Gamma|u_1|^{\frac{2r(\sigma-2)}{r-2}}dx\right)^{\frac{r-2}{2r}}+\left(\int_\Gamma|u_2|^{\frac{2r(p-2)}{r-2}}dx\right)^{\frac{r-2}{2r}}\right)\times$$
$$\times\left(\int_\Gamma u^r(\tau)dx\right)^{\frac{1}{r}}\left(\int_\Gamma u^2(t)dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

$r=\frac{2(n-1)}{n-2}, \sigma \leq 2+\frac{2}{n-2}, n \geq 3$ деп алайық. Соболев класындағы функциялардың іздері туралы теореманы қолданып, төмендегі теңсіздікті аламыз:

$$\chi a_0(\sigma-1)\int_0^t\int_\Gamma k(x,\tau)(|u_1|^{\sigma-2}+|u_2|^{\sigma-2})\,u(\tau)u(t)d\Gamma d\tau \leq$$
$$C_4\|u(t)\|_{2,\Omega}\int_0^t\|u(\tau)\|_{r,\Omega}d\tau \leq C_4 y(t)\int_0^t y(\tau)\,d\tau.$$

Келесі қосылғыштар дәл осылай бағаланады:

$$a_1\left|\int_\Gamma k(x,\tau)\big(|u_1(\tau)|^{\sigma-2}u_1(\tau)-|u_2(\tau)|^{\sigma-2}u_2(\tau)\big)\|\nabla u_1\|_{2,\Omega}^{2q-2}u(t)d\Gamma\right| \leq$$
$$\leq a_1(\sigma-1)K_1C_5\int_\Gamma (|u_1|^{\sigma-2}+|u_2|^{\sigma-2})u(\tau)u(t)d\Gamma \leq$$
$$a_1(\sigma-1)K_1C_5'\left(\left(\int_\Gamma |u_1|^{\frac{2r(\sigma-2)}{r-2}}dx\right)^{\frac{r-2}{2r}}+\left(\int_\Gamma |u_2|^{\frac{2r(p-2)}{r-2}}dx\right)^{\frac{r-2}{2r}}\right)$$
$$\times\left(\int_\Gamma u^r(\tau)dx\right)^{\frac{1}{r}}\left(\int_\Gamma u^2(t)dx\right)^{\frac{1}{2}},$$
$$a_1\left|\int_0^t\int_\Gamma k(x,\tau)(|u_1(\tau)|^{\sigma-2}u_1(\tau)-|u_2(\tau)|^{\sigma-2}u_2(\tau))\,\|\nabla u_1\|_{2,\Omega}^{2q-2}u(t)d\Gamma d\tau\right|$$
$$\leq C_5\|u(t)\|_{2,\Omega}\int_0^t\|u(\tau)\|_{r,\Omega}d\tau \leq C_5 y(t)\int_0^t y(\tau)\,d\tau,$$
$$a_1\left|\int_0^t\int_\Gamma k(x,\tau)(\|\nabla u_1(\tau)\|_{2,\Omega}^{2q-2}-\big(\|\nabla u_2(\tau)\|_{2,\Omega}^{2q-2}\big)|u_2(\tau)|^{\sigma-2}u_2\,(\tau)u(t)d\Gamma d\tau\right| \leq$$
$$\leq a_1K_1\int_0^t(\|\nabla u_1(\tau)\|_{2,\Omega}^{2q-2}-\big(\|\nabla u_2(\tau)\|_{2,\Omega}^{2q-2}\big)\int_\Gamma |u_2(\tau)|^{\sigma-1}\,u(t)d\Gamma d\tau$$
$$\leq a_1K_1\int_0^t(\|\nabla u_1(\tau)\|_{2,\Omega}^{2q-3}+\big(\|\nabla u_2(\tau)\|_{2,\Omega}^{2q-3}\big)$$
$$\int_\Omega (|\nabla u_1(\tau)|^2-|\nabla u_2(\tau)|^2)dx\,\|u_2(\tau)\|_{\sigma,\Gamma}\|u(t)\|_{\sigma,\Gamma}d\tau \leq$$
$$\leq a_1K_1C'_2\|u(t)\|_{\sigma,\Gamma}\int_0^t\|u_2(\tau)\|_{\sigma,\Gamma}\,\|\nabla u_1(\tau)+\nabla u_2(\tau)\|_{2,\Omega}d\tau$$
$$\leq C_6\|u(t)\|_{\sigma,\Gamma}\int_0^t\|u_2(\tau)\|_{\sigma,\Gamma}\,d\tau \leq C_6 y(t)\int_0^t y(\tau)d\tau,$$

мұндағы $\sigma \leq 2+\frac{2}{n-2},\ n \geq 3$. (3.5.3) арқылы біз келесіні аламыз:

$$y^2(t) + \chi \int_\Gamma k(x,t)|u(x,t)|^\sigma \, d\Gamma$$
$$\le a_0 \|\nabla u(t)\|_{2,\Omega} \int_0^t \|\nabla u(\tau)\|_{2,\Omega}\, d\tau + a_1 C_1 \|\nabla u(t)\|_{2,\Omega} \int_0^t \|\nabla u(\tau)\|_{2,\Omega}\, d\tau$$
$$+ a_1 C_2 \|\nabla u(t)\|_{2,\Omega} \int_0^t \|\nabla u(\tau)\|_{2,\Omega}\, d\tau +$$
$$+(C_3 + C_4 + C_5 + C_6) y(t) \int_0^t y(\tau)\, d\tau,$$

немесе

$$y^2(t) + \chi \int_\Gamma k(x,\tau)|u(x,t)|^\sigma \, d\Gamma \le (a_1 + a_1 C_1 + a_1 C_2 + C_3 + C_4 + C_5 + C_6) y(t) \int_0^t y(\tau) d\tau. \qquad (3.5.4)$$

(3.5.4)-тен шығатын

$$y(t) \le C_7 \int_0^t y(\tau)\, d\tau,$$

теңсіздігі Гронуол леммасын қолдана отырып (0, T) уақыт интервалынының барлық жерінде дерлік $\int_\Omega (\chi|\nabla u|^2 + |u|^2) dx = 0$ екендігін білдіреді. Бұл әлсіз жалпылама шешімнің жалғыз екендігін білдіреді.

3.6 Шешімнің ақырлы уақытта қирауы

(3.1.1)-(3.1.3) есептің шешімі уақыттың ақырлы мезетінде қирап кететін шарттарды аламыз. u(x,t) шешімі T_1 уақыт мезетінде қирайды дейміз, егер шешімнің қандай да бір $\|u(\cdot,t)\|_\Omega$ нормасы $t \to T_1$ ұмтылғанда шексіздікке ұмтылса. Келесі белгілеуді енгіземіз:

$$\Phi(t) = \frac{1}{2}\|u\|_{2,\Omega}^2 + \frac{\chi}{2}\|\nabla u\|_{2,\Omega}^2 + \chi \frac{\sigma - 1}{\sigma} \int_\Gamma k(x,t)|u(x,t)|^\sigma \, d\Gamma,$$
$$J(t) = \|u_t\|_{2,\Omega}^2 + \chi \|\nabla u_t\|_{2,\Omega}^2 + \chi(\sigma - 1) \int_\Gamma k(x,t)|u|^{\sigma-2}|\partial_t u|^2 \, d\Gamma.$$

Теорема 3.4. (3.1.4) және $n \ge 3,\ q > 1,\ p > 4q - 2,\ 2 < \sigma < \frac{2(n-1)}{n-2}, p < \sigma$ шарттары орындалсын және сонымен қатар:

$$\int_\Omega b(x,0)|u_0|^p \, dx - a_0 \int_\Omega |\nabla u_0|^2 \, dx - a_1 \left(\int_\Omega |\nabla u_0|^2 \, dx\right)^q - \big(a_0 + a_1 \|\nabla u_0\|_{2,\Omega}^{2q-2}\big) \int_\Gamma k(x,0)|u_0|^\sigma \, d\Gamma - \frac{\chi}{\sigma} \int_\Gamma K_t(x,0)|u_0|^\sigma \, d\Gamma > 0,$$

$$|\Phi'(0)|^2 > \frac{\beta\Phi^2(0)}{\alpha-1} + \frac{16p}{4\alpha-p-2}\Phi^{\frac{p+2}{2}}(0) + \frac{2Cp}{2\alpha-1}\Phi(0),$$

мұндағы

$$\Phi(0) = \tfrac{1}{2}\|u_0\|_{2,\Omega}^2 + \tfrac{\chi}{2}\|\nabla u_0\|_{2,\Omega}^2 + \chi\tfrac{\sigma-1}{\sigma}\int_\Gamma\ k(x,0)|u_0|^\sigma\,d\Gamma,$$

$$\Phi'(0) = \int_\Omega\ b(x,0)|u_0|^p\,dx - a_0\int_\Omega |\nabla u_0|^2\,dx - a_1\left(\int_\Omega |\nabla u_0|^2\,dx\right)^q -$$

$$\left(a_0 + a_1\|\nabla u_0\|_{2,\Omega}^{2q-2}\right)\int_\Gamma\ k(x,0)|u_0|^\sigma\,d\Gamma - \tfrac{x}{\sigma}\int_\Gamma\ K_t(x,0)|u_0|^\sigma\,d\Gamma.$$

Онда (3.1.1) - (3.1.3) бастапқы-шеттік есептің шешімі қандай да бір ақырлы T_1 уақытында қирайды, яғни

$$\lim_{t\to T_1}\Phi(t) = +\infty,$$

мұндағы

$$T_1 = \frac{\Phi^{1-\alpha}(0)}{A} > 0,$$

$$A^2 = |\Psi'(0)|^2 - \beta(\alpha-1)|\Psi(0)|^2 - \frac{16p(\alpha-1)^2}{4\alpha-p-2}\Psi^{\frac{4\alpha-p-2}{2(\alpha-1)}}(0)$$

$$-\frac{2Cp(\alpha-1)^2}{2\alpha-1}\Psi^{\frac{2\alpha-1}{\alpha-1}}(0).$$

Дәлелдеуі. (3.1.1) теңдеуді $u(x,t)$ және u_t(x, t) функцияларына ретімен көбейтеміз және Ω облысы бойынша интегралдаймыз. Содан кейін келесі қатынастарды аламыз:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega\ [|u^2| + \chi|\nabla u|^2]\,dx + \chi\frac{\sigma-1}{\sigma}\frac{d}{dt}\int_\Gamma\ k(x,t)|u|^\sigma\,d\Gamma +$$

$$a_0\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx + a_1\left(\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx\right)^q +$$

$$+\left(a_0 + a_1\|\nabla u\|_{2,\Omega}^{2q-2}\right)\int_\Gamma\ k(x,t)|u|^\sigma\,d\Gamma +$$

$$\frac{x}{\sigma}\int_\Gamma\ K_t(x,t)|u|^\sigma\,d\Gamma = \int_\Omega\ b(x,t)|v|^p\,dx,$$

$$\int_\Omega\ (|\partial_t u|^2 + \chi|\partial_t\nabla u|^2)\,dx + \frac{d}{dt}\left(\frac{a_0}{2}\|\nabla u\|_{2,\Omega}^2 + \frac{a_1}{2q}\|\nabla u\|_{2,\Omega}^{2q}\right) +$$

$$\chi(\sigma-1)\int_\Gamma\ k(x,t)|u|^{\sigma-2}|\partial_t u|^2\,d\,\Gamma =$$

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega} b(x,t)|u|^p\,dx - \frac{1}{p}\int_{\Omega} b_t(x,t)\,|u|^p\,dx$$
$$-\frac{1}{\sigma}\frac{d}{dt}\int_{\Gamma} \left(a_0 + a_1\|\nabla u\|_{2,\Omega}^{2q-2}\right)k(x,t)|u|^{\sigma}\,d\Gamma +$$
$$+\frac{q-1}{\sigma}a_1\|\nabla u\|_{2,\Omega}^{2q-4}\int_{\Omega} \nabla u\nabla\partial_t u\,dx\int_{\Gamma} k(x,t)|u|^{\sigma}\,d\Gamma +$$
$$\frac{1}{\sigma}\left(a_0 + a_1\|\nabla u\|_{2,\Omega}^{2q-2}\right)\int_{\Gamma} k_t(x,t)|u|^{\sigma}\,d\Gamma -$$
$$\frac{\chi}{\sigma}\frac{d}{dt}\int_{\Gamma} k_t(x,t)|u|^{\sigma}\,d\Gamma + \frac{\chi}{\sigma}\int_{\Gamma} k_{tt}(x,t)|u|^{\sigma}\,d\Gamma.$$

Енгізілген белгілеулердің арқасында біз келесіні аламыз:

$$\frac{d\Phi(t)}{dt} = -a_0\int_{\Omega} |\nabla u|^2\,dx - a_1\left(\int_{\Omega} \nabla u^2\,dx\right)^q - \left(a_0 + a_1\|\nabla u\|_{2,\Omega}^{2q-2}\right)$$
$$\int_{\Gamma} k(x,t)|u|^{\sigma}\,d\Gamma - \frac{\chi}{\sigma}\int_{\Gamma} k_t(x,t)|u|^{\sigma}\,d\Gamma + \int_{\Omega} b(x,t)\,|u|^p dx, \tag{3.6.1}$$

$$J(t) = -\frac{d}{dt}\left(\frac{a_0}{2}\|\nabla u\|_{2,\Omega}^2 + \frac{a_1}{2q}\|\nabla u\|_{2,\Omega}^{2q}\right) +$$
$$\frac{1}{p}\frac{d}{dt}\int_{\Omega} b(x,t)|u|^p\,dx - \frac{1}{p}\int_{\Omega} b_t(x,t)\,|u|^p\,dx -$$
$$\frac{1}{\sigma}\frac{d}{dt}\int_{\Gamma} \left(a_0 + a_1\|\nabla u\|_{2,\Omega}^{2q-2}\right)k(x,t)|u|^{\sigma}\,d\Gamma +$$
$$+\frac{q-1}{\sigma}a_1\|\nabla u\|_{2,\Omega}^{2q-4}\int_{\Omega} \nabla u\nabla\partial_t u\,dx\int_{\Gamma} k(x,t)|u|^{\sigma}\,d\Gamma +$$
$$\frac{1}{\sigma}\left(a_0 + a_1\|\nabla u\|_{2,\Omega}^{2q-2}\right)\int_{\Gamma} k_t(x,t)|u|^{\sigma}\,d\Gamma -$$
$$\frac{\chi}{\sigma}\frac{d}{dt}\int_{\Gamma} k_t(x,t)|u|^{\sigma}\,d\Gamma + \frac{\chi}{\sigma}\int_{\Gamma} k_{tt}(x,t)|u|^{\sigma}\,d\Gamma. \tag{3.6.2}$$

Φ белгілеуін пайдалану арқасында табатынымыз:

$$|\Phi'(t)| \le \|u\|_{2,\Omega}\|u_t\|_{2,\Omega} + \chi\|\nabla u\|_{2,u}\|\nabla u_t\|_{2,\Omega} +$$
$$\chi(\sigma-1)\left(\int_{\Gamma} k(x,t)|u|^{\sigma}\,d\Gamma\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\Gamma} k(x,t)|u|^{\sigma-2}\lfloor u_t\rfloor^2\,d\Gamma\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$+\chi\frac{\sigma-1}{\sigma}\int_{\Gamma} k_t(x,t)|u|^{\sigma}\,d\Gamma. \tag{3.6.3}$$

Әрі қарай, ескеретініміз:

$$\Phi(t)J(t) = \left(\frac{1}{2}\|u\|_{2,\Omega}^2 + \frac{\chi}{2}\|\nabla u\|_{2,\Omega}^2 + \chi\frac{\sigma-1}{\sigma}\int_\Gamma k(x,t)|u|^\sigma\,d\Gamma\right)\cdot$$
$$\cdot\left(\|u_t\|_{2,\Omega}^2 + \chi\|\nabla u_t\|_{2,\Omega}^2 + \chi(\sigma-1)\int_\Gamma k(x,t)|u|^{\sigma-2}|\partial_t u|^2\,d\Gamma\right)$$
$$\geq \frac{1}{\sigma}\left(\|u\|_{2,\Omega}^2 + \chi\|\nabla u\|_{2,\Omega}^2 + \chi(\sigma-1)\int_\Gamma k(x,t)|u|^\sigma\,d\Gamma\right)\cdot$$
$$\cdot\left(\|u_t\|_{2,\Omega}^2 + \chi\|\nabla u_t\|_{2,\Omega}^2 + \chi(\sigma-1)\int_\Gamma k(x,t)|u|^{\sigma-2}|\partial_t u|^2\,d\Gamma\right). \quad (3.6.4)$$

(3.6.3) пен (3.6.4) –тен және төмендегі теңсіздіктен

$$(ab+cd+ef)^2 \leq (a^2+c^2+e^2)(b^2+d^2+f^2),$$

келесі теңсіздік шығады:

$$|\Phi'(t)|^2 \leq \left(\|u\|_{2,\Omega}^2 + \chi\|\nabla u\|_{2,\Omega}^2 + \chi(\sigma-1)\int_\Gamma k(x,t)|u|^\sigma\,d\Gamma\right)\cdot$$
$$\left(\|u_t\|_{2,\Omega}^2 + \chi\|\nabla u_t\|_{2,\Omega}^2 + \chi(\sigma-1)\int_\Gamma k(x,t)|u|^{\sigma-2}|u_t|^2\,d\Gamma\right).$$

Бұл дегеніміз:

$$|\Phi'(t)|^2 \leq \sigma\Phi(t)J(t) \leq \sigma\Phi(t)J(t) + \chi\frac{\sigma-1}{\sigma}\int_\Gamma k_t(x,t)|u|^\sigma\,d\Gamma. \quad (3.6.5)$$

Элементар түрлендірулерден кейін (3.6.2) келесі түрде жазылады:

$$J(t) = \frac{1}{p}\frac{d}{dt}\left(\int_\Omega b(x,t)|u|^p\,dx - a_0\int_\Omega|\nabla u|^2\,dx - a_1\left(\int_\Omega|\nabla u|^2\,dx\right)^q\right) -$$
$$\left(a_0 + a_1\|\nabla u\|_{2,\Omega}^{2q-2}\right)\int_\Gamma k(x,t)|u|^\sigma\,d\Gamma - \frac{\chi}{\sigma}\int_\Gamma k_t(x,t)|u|^\sigma\,d\Gamma\Big) -$$
$$-\frac{a_0(p-2)}{2p}\frac{d}{dt}\int_\Gamma|\nabla u|^2\,dx - \frac{a_1(p-2q)}{2pq}\frac{d}{dt}\left(\int_\Omega|\nabla u|^2\,dx\right)^q +$$
$$+\frac{\sigma-p}{p}\int_\Gamma\left(a_0 + a_1\|\nabla u\|_{2,\Omega}^{2q-2}\right)k(x,t)|u|^{\sigma-2}uu_t\,d\Gamma +$$
$$+\frac{\chi(p-1)}{p}\int_\Gamma k_t(x,t)|u|^{\sigma-2}uu_t\,d\Gamma - \frac{1}{p}\int_\Omega b_t(x,t)|u|^p\,dx +$$
$$\frac{q-1}{p}a_1\|\nabla u\|_{2,\Omega}^{2q-4}\int_\Omega\nabla u\nabla\partial_t u\,dx\int_\Gamma k(x,t)|u|^\sigma\,d\Gamma +$$
$$+\frac{1}{p}\left(a_0 + a_1\|\nabla u\|_{2,\Omega}^{2q-2}\right)\int_\Gamma k_t(x,t)|u|^\sigma\,d\Gamma - \frac{\chi}{\sigma p}\int_\Gamma k_{tt}(x,t)|u|^\sigma\,d\Gamma. \quad (3.6.6)$$

(3.6.6) оң жағын келесі жолмен бағалаймыз:

$$\left|-\frac{a_0(p-2)}{2p}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx\right| \leq \frac{a_0(p-2)}{p}\|\nabla u\|_{2,\Omega}\|\nabla u_t\|_{2,\Omega}$$

$$\leq \varepsilon_1\|\nabla u_t\|_{2,\Omega}^2 + \frac{a_0^2(p-2)^2}{4p^2\varepsilon_1}\|\nabla u\|_{2,\Omega}^2 \leq \varepsilon_1 J(t) + \frac{a_0^2(p-2)^2}{4p^2\varepsilon_1}\Phi(t).$$

$$\left|\frac{a_1(p-2q)}{2pq}\frac{d}{dt}\left(\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx\right)^q\right|$$

$$\leq \frac{a_1(p-2q)}{2p}\left(\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx\right)^{q-1}\|\nabla u\|_{2,\Omega}\|\nabla u_t\|_{2,\Omega}$$

$$\leq \varepsilon_2\|\nabla u_t\|_{2,\Omega}^2 + \frac{a_1^2(p-2)^2}{16p^2\varepsilon_2}\|\nabla u\|_{2,\Omega}^{4q-2}$$

$$\leq \varepsilon_2 J(t) + \frac{a_1^2(p-2q)^2}{16p^2\varepsilon_2}\Phi^{2q-1}(t) \leq \varepsilon_2 J(t) + \Phi^{\frac{p}{2}}(t) + C_2(\varepsilon_2),$$

мұндағы $C_2(\varepsilon_2) = \left(\frac{a_1^2(p-2q)^2}{16p^2\varepsilon_2}\right)^{\frac{p}{p-4q+2}}\frac{(p-4q+2)(4q-2)^{\frac{4q-2}{p-4q+2}}}{p^{\frac{p}{p-4q+2}}}$.

$$\left|\frac{\sigma-p}{p}\int_\Gamma \left(a_0 + a_1\|\nabla u\|_{2,\Omega}^{2q-2}\right)k(x,t)|u|^{\sigma-2}uu_t\,d\Gamma\right| \leq$$

$$\frac{\sigma-p}{p}\left(a_0 + a_1\|\nabla u\|_{2,\Omega}^{2q-2}\right)\left(\int_\Gamma k(x,t)|u|^{\sigma-2}|u_t|^2\,d\Gamma\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Gamma k(x,t)|u|^\sigma\,d\Gamma\right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \varepsilon_3\int_\Gamma k(x,t)|u|^{\sigma-2}|u_t|^2\,d\Gamma + \frac{(\sigma-p)^2}{4p^2\varepsilon_3}\left(a_0 + a_1\|\nabla u\|_{2,\Omega}^{2q-2}\right)^2\int_\Gamma k(x,t)|u|^\sigma\,d\Gamma$$

$$\leq \varepsilon_3 J(t) + \frac{(\sigma-p)^2 a_0^2}{2p^2\varepsilon_3}\Phi(t) + \Phi^{\frac{p}{2}}(t) + C_3(\varepsilon_3),$$

мұндағы $C_3(\varepsilon_3) = \left(\frac{(\sigma-p)^2a_1^2}{2p^2\varepsilon_3}\right)^{\frac{p}{p-4q+2}}\frac{(p-4q+2)(4q-2)^{\frac{4q-2}{p-4q+2}}}{p^{\frac{p}{p-4q+2}}}$.

$$\left|\frac{\chi(p-1)}{p}\int_\Gamma k_t(x,t)|u|^{\sigma-2}uu_t\,d\Gamma\right| \leq \varepsilon_4 J(t) + \frac{\chi^2(p-1)^2}{4p^2\varepsilon_4}K_1^2\Phi(t).$$

$$\left|\int_\Omega b_t(x,t)|u|^p\,dx\right| \leq b_1\|u\|_{p,\Omega}^p \leq b_1C_1\left(\chi\|\nabla u\|_{2,\Omega}^2 + \|u\|_{2,\Omega}^2\right)^{\frac{p}{2}} \leq b_1C_1\Phi^{\frac{p}{2}}(t).$$

$$\left|\frac{q-1}{p}a_1\|\nabla u\|_{2,\Omega}^{2q-4}\int_\Omega \nabla u\nabla\partial_t u\,dx\int_\Gamma k(x,t)|u|^\sigma\,d\Gamma\right| \leq$$

$$\varepsilon_5 J(t) + \frac{(q-1)^2}{4p^2\varepsilon_5} a_1^2 \Phi^{2q-1}(t) \le \varepsilon_5 J(t) + \Phi^{\frac{p}{2}}(t) + C_5(\varepsilon_5),$$

мұндағы $C_5(\varepsilon_5) = \left(\frac{(q-1)^2}{4p^2\varepsilon_5} a_1^2\right)^{\frac{p}{p-4q+2}} \frac{(p-4q+2)(4q-2)^{\frac{4q-2}{p-4q+2}}}{p^{\frac{p}{p-4q+2}}}.$

$$\frac{1}{p}\left(a_0 + a_1 \|\nabla u\|_{2,\Omega}^{2q-2}\right)\left|\int_\Gamma k_t(x,t)|u|^\sigma \, d\Gamma\right| \le$$

$$\le \frac{1}{p}\left(a_0 + a_1 \|\nabla u\|_{2,\Omega}^{2q-2}\right)\int_\Gamma \frac{|k_t(x,t)|}{k(x,t)} k(x,t)|u|^\sigma \, d\Gamma \le$$
$$\le \frac{K_1 a_0}{p}\Phi(t) + \Phi^{\frac{p}{2}}(t) + C_6,$$

мұндағы $C_6 = \left(\frac{K_1 a_1}{p}\right)^{\frac{p}{p-2q+2}} \frac{(p-2q+2)(2q-2)^{\frac{2q-2}{p-2q+2}}}{p^{\frac{p}{p-2q+2}}}.$

$$\left|\frac{\chi}{\sigma p}\int_\Gamma k_{tt}(x,t)|u|^\sigma \, d\Gamma\right| \le \frac{\chi}{\sigma p} K_2 \int_\Gamma k(x,t)|u|^\sigma \, d\Gamma \le \frac{\chi}{\sigma p} K_2 \Phi(t).$$

Алынған бағалауларды (3.6.6)-ға апарып қоямыз.

$$(1-\varepsilon_1-\varepsilon_2-\varepsilon_3-\varepsilon_4-\varepsilon_5)J(t) \le \frac{1}{p}\Phi''(t) +$$
$$\left(\frac{a_0^2(p-2)^2}{4p^2\varepsilon_1} + \frac{(\sigma-p)^2 a_0^2}{2p^2\varepsilon_3} + \frac{\chi^2(p-1)^2}{4p^2\varepsilon_4}K_1^2 + \frac{K_1 a_0}{p} + \frac{\chi}{\sigma p}K_2\right)\Phi(t) +$$
$$+(4 + b_1 C_1)\Phi^{\frac{p}{2}}(t) + C_2(\varepsilon_2) + C_3(\varepsilon_3) + C_5(\varepsilon_5) + C_6. \qquad (3.6.7)$$

(3.6.7) теңсіздігін $\Phi(t)$ -ға көбейтеміз және (3.6.5) ескере отырып, қарапайым дифференциалдық теңсіздікке келтіреміз.

$$\Phi''(\mathrm{t})\Phi(t) - \alpha|\Phi'(t)|^2 + \beta\Phi^2(t) + 4p\Phi^{\frac{p+2}{2}}(t) + Cp\Phi(t) \ge 0, \quad (3.6.8)$$

мұндағы $\alpha = \frac{p(1-\varepsilon_1-\varepsilon_2-\varepsilon_3-\varepsilon_4-\varepsilon_5)}{\sigma}$, $\varepsilon_i = \frac{p-\sigma}{10p}$, $i = 1,2,\ldots,5;$

$$\beta = p\left(\frac{a_0^2(p-2)^2}{4p^2\varepsilon_1} + \frac{(\sigma-p)^2 a_0^2}{2p^2\varepsilon_3} + \frac{\chi^2(p-1)^2}{4p^2\varepsilon_4}K_1^2 + \frac{K_1 a_0}{p} + \frac{\chi}{\sigma p}K_2 + K_1\chi\frac{\sigma-1}{\sigma}\right).$$

Коэффициенттердің $p > \sigma$ шартын қанағаттандыруын талап етіледі. Бұл жағдайда $\alpha > 1$ болатындай ε таңдап алуға болады. Жаңа функцияны енгіземіз:

$$\Psi(t) = \Phi^{1-\alpha}(t),\ \alpha > 1. \tag{3.6.9}$$

(3.6.8) теңсіздігінің екі жағын $\Phi^{1+\alpha}(t) \geq 0$ функциясына бөлсек келесі теңсіздікті аламыз:

$$\frac{\Phi''(t)}{\Phi^{\alpha}(t)} - \alpha\frac{|\Phi'(t)|^2}{\Phi^{1+\alpha}(t)} + \beta\Phi^{1-\alpha}(t) + 4p\Phi^{\frac{p}{2}-\alpha}(t) + Cp\Phi^{-\alpha}(t) \geq 0,$$

ол *Ψ(t)* функциясы үшін келесі түрде болады:

$$\frac{\Psi''(t)}{1-\alpha} + \beta\Psi(t) + 4p\Psi^{\frac{p-2\alpha}{2(1-\alpha)}}(t) + Cp\Psi^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}(t) \geq 0. \tag{3.6.10}$$

Енді бастапқы деректер туралы тағы бір болжам жасаймыз:

$$\Phi'(0) = -a_0\int_{\Omega} |\nabla u_0|^2\,dx - a_1\left(\int_{\Omega} |\nabla u_0|^2\,dx\right)^q -$$
$$\left(a_0 + a_1\|\nabla u_0\|_{2,\Omega}^{2q-2}\right)\int_{\Gamma} k(x,0)|u_0|^{\sigma}\,d\Gamma -$$
$$\frac{\chi}{\sigma}\int_{\Gamma} K_t(x,0)\,|u_0|^{\sigma}\,d\Gamma + \int_{\Omega} b(x,0)|u_0|^p\,dx > 0. \tag{3.6.11}$$

Онда

$$\Phi'(t) \geq 0 \text{ барлық } t\epsilon[0,t_1] \text{ үшін} \tag{3.6.12}$$

орындалатындай $t_1 > 0$ болатындай уақыт мезеті табылады. (3.6.9) қатынасынан төмендегі өрнекті аламыз:

$$\Psi'(t) = (1-\alpha)\Phi^{-\alpha}(t)\Phi'(t), \tag{3.6.13}$$

бұдан, $\alpha > 1$ ескере отырып (3.6.12) көмегімен келесі теңсіздікті аламыз:

$$\Psi'(t) \leq 0 \text{ барлық } t\epsilon[0,t_1] \text{ үшін.} \tag{3.6.14}$$

Содан кейін (3.6.10) –ды $\Psi'(t)$-ға көбейтіп келесі теңсіздікті аламыз:

$$\frac{\Psi''(t)\Psi'(t)}{1-\alpha} + \beta\Psi(t)\Psi'(t) + 4p\Psi^{\frac{p-2\alpha}{2(1-\alpha)}}(t)\Psi'(t) + Cp\Psi^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}(t)\Psi'(t) \leq 0,$$

барлық $t\ \epsilon[0,t_1]$ үшін. Бұдан төмендегі өрнекті аламыз:

$$\Psi''(t)\Psi'(t) \geq \beta(\alpha-1)\Psi(t)\Psi'(t) + 4p(\alpha-1)\Psi^{\frac{p-2\alpha}{2(1-\alpha)}}(t)\Psi'(t) +$$

$$+Cp(\alpha-1)\Psi^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}(t)\Psi'(t),$$

барлық $t\,\epsilon[0,t_1]$ үшін. Демек, осыдан шығатыны:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\Psi'(t)|^2 \geq \frac{\beta(\alpha-1)}{2}\frac{d}{dt}|\Psi(t)|^2 + \frac{8p(\alpha-1)^2}{4\alpha-p-2}\frac{d}{dt}\Psi^{\frac{4\alpha-p-2}{2(\alpha-1)}}(t) + +\frac{Cp(\alpha-1)^2}{2\alpha-1}\frac{d}{dt}\Psi^{\frac{2\alpha-1}{\alpha-1}}(t).$$

Соңғы теңсіздікті интегралдасақ, алатынымыз:

$$|\Psi'(t)|^2 \geq A^2 + \beta(\alpha-1)|\Psi(t)|^2 + \frac{16p(\alpha-1)^2}{4\alpha-p-2}\Psi^{\frac{4\alpha-p-2}{2(\alpha-1)}}(t) + + \frac{2Cp(\alpha-1)^2}{2\alpha-1}\Psi^{\frac{2\alpha-1}{\alpha-1}}(t) \geq A^2, \tag{3.6.15}$$

мұндағы

$$A^2 = |\Psi'(0)|^2 - \beta(\alpha-1)|\Psi(0)|^2 - \frac{16p(\alpha-1)^2}{4\alpha-p-2}\Psi^{\frac{4\alpha-p-2}{2(\alpha-1)}}(0) - \frac{2Cp(\alpha-1)^2}{2\alpha-1}\Psi^{\frac{2\alpha-1}{\alpha-1}}(0).$$

Бастапқы деректер үшін тағы бір шарттың орындалуын талап етеміз.

$$A^2 = (\alpha-1)^2|\Phi'(0)|^2\Phi^{-2\alpha}(0) - \beta(\alpha-1)\Phi^{2-2\alpha}(0) - \frac{16p(\alpha-1)^2}{4\alpha-p-2}\Phi^{\frac{p+2-4\alpha}{2}}(0) - \frac{2Cp(\alpha-1)^2}{2\alpha-1}\Phi^{1-2\alpha}(0) > 0.$$

$$|\Phi'(0)|^2 > \frac{\beta\Phi^2(0)}{\alpha-1} + \frac{16p}{4\alpha-p-2}\Phi^{\frac{p+2}{2}}(0) + \frac{2Cp}{2\alpha-1}\Phi(0). \tag{3.6.16}$$

Сонда (3.6.15) теңсіздігінен алатынымыз:

$$|\Psi'(t)| \geq A > 0 \text{ барлық } t\,\epsilon[0,t_1] \text{ үшін.} \tag{3.6.17}$$

Демек, осыдан келесі шығады:

$$-\Psi'(t) \geq A > 0 \Rightarrow \Psi'(t) \leq -A < 0 \text{ барлық } t\,\epsilon[0,t_1] \text{ үшін.}$$

(3.6.13) өрнегінен шығатыны

$$\Psi'(t) = (1-\alpha)\Phi^{-\alpha}(t)\Phi'(t) \leq -A \Rightarrow \Phi'(t) \geq \frac{A}{\alpha-1}\Phi^{\alpha}(t) > 0,$$

демек, бұдан шығатыны, (3.6.11)-гі бастапқы шарттағы $\Phi'(t)$ шамасы бастапқы есептің шешімінің табылатын барлық аралығы үшін нөлден үлкен болып қалады. Осылайша, (2.6.17) -тен төмендегі теңсіздік шығады:

$$\Psi'(t) \leq -A < 0 \text{ барлық } t \,\epsilon [0, t_1] \text{ үшін.}$$

Соңғы теңсіздікті интегралдап, келесі өрнекті аламыз:

$$\Psi(t) \leq \Psi(0) - At,$$

$$\Phi^{1-\alpha}(t) \leq \Phi^{1-\alpha}(0) - At \Rightarrow \Phi(t) \geq \frac{1}{[\Phi^{1-\alpha}(0) - At]^{\frac{1}{\alpha-1}}}.$$

Демек, ақырлы уақытта $T_0 \,\epsilon\, (0, T_1\,]$, мұндағы

$$T_1 = \frac{\Phi^{1-\alpha}(0)}{A} > 0,$$

Ψ(t) функциясы нөлге айналады. Бұл дегеніміз:

$$\lim_{t \to T_0} \Phi(t) = +\infty.$$

3.7 Уақыт бойынша шешімнің экспоненциалды кемуі

$Q_T = \{(x, t): x \in \Omega\,,\ \Omega \subset R^n,\ 0 < t < T\}$ цилиндрінде төмендегі квазисызықты теңдеуін

$$\frac{\partial}{\partial t}(u - \chi \Delta u) - \left(a_0 + a_1 \|\nabla u\|_{2,\Omega}^{2q-2}\right)\Delta u + u + |u|^{p-2}u = f(x, t), \qquad (3.7.1)$$

сызықты емес шекаралық шартымен

$$\frac{\partial u}{\partial n} + |u|^{\sigma-2}u\Big|_{\Gamma} = 0, \ \ \Gamma = \partial\Omega \times (0, T) \qquad (3.7.2)$$

және бастапқы шартымен

$$u(x, 0) = u_0(x). \qquad (3.7.3)$$

берілген есебін қарастырамыз. Мұндағы $\Omega \subset R^n, n \geq 3$ жеткілікті жатық шекарасы бар шектелген аймақ, $\partial\Omega, a_0, a_1$ және σ оң тұрақтылар.

Теорема 3.5. (3.7.8) және $\sigma > 1, q > 1, p > 2$, сонымен қатар, $u \,\epsilon\, W_2^1(\Omega) \cap L_\sigma(\Gamma)$ шарттары орындалсын. Онда (3.7.1)-(3.7.3) есептің шешімі келесі бағалауларды қанағаттандырады:

$$\rho(t) \leq \exp(-\alpha t)\left(\rho(0) + \frac{C_f}{\mu - \alpha}\right), \mu > \alpha,$$

$$\rho(t) \le \exp(-\alpha t)\big(\rho(0) + tC_f\big), \mu = \alpha.$$

Дәлелдеуі. Уақыт шексіздікке ұмтылған кездегі шешімнің асимптотикалық әрекетін қарастырайық. (3.7.1) теңдеуді $u(x,t)$ функциясына көбейтіп, Ω облысы бойынша интегралдап төмендегі өрнекті аламыз:

$$\rho'(t) + a_0 \int_\Omega |\nabla u|^2\, dx + a_1 \left(\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx\right)^q + \left(a_0 + a_1 \|\nabla u\|_{2,\Omega}^{2q-2}\right) *$$
$$* \int_\Gamma |u|^\sigma\, d\Gamma + \int_\Omega |u|^2\, dx + \int_\Omega |u|^p\, dx = \int_\Omega f u\, dx. \qquad (3.7.4)$$

мұндағы $\rho(t) = \frac{1}{2}\left(\int_\Omega [|u|^2 + \chi|\nabla u|^2]\, dx + 2\chi\frac{\sigma-1}{\sigma}\int_\Gamma |u|^\sigma\, d\Gamma\right)$.

(3.7.4)-ң оң жағын бағалаймыз:

$$\left|\int_\Omega f u\, dx\right| \le \frac{1}{2}\|u\|_{2,\Omega}^2 + \frac{1}{2}\int_\Omega |f|^2\, dx.$$

Алынған бағалауларды (2.7.4)-ке қойып келесі теңсіздікке келеміз:

$$\rho'(t) + Q \le \frac{1}{2}\int_\Omega |f|^2\, dx, \qquad (3.7.5)$$

мұндағы

$$Q = a_0 \int_\Omega |\nabla u|^2\, dx + a_1\left(\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx\right)^q + \big(a_0 +$$
$$a_1\|\nabla u\|_{2,\Omega}^{2q-2}\big)\int_\Gamma |u|^\sigma\, d\Gamma + \frac{1}{2}\int_\Omega |u|^2\, dx + \int_\Omega |u|^p\, dx.$$

Мұны тексеру оңай:

$$\alpha\rho \le Q, \alpha = min\left(a_0, \frac{a_0}{\chi}, \frac{a_0\sigma}{\chi(\sigma-1)}\right). \qquad (3.7.6)$$

(3.7.5) және (3.7.6) қатынасы қарапайым дифференциалдық теңсіздік үшін қойылған Коши есебіне әкеледі.

$$\frac{d}{dt}\rho(t) + \alpha\rho(t) \le \frac{1}{2}\|f(t)\|_{2,\Omega}^2,\ \rho(0) = \rho_0 \qquad (3.7.7)$$

Келесі өрнек орынды деп есептейік:

$$\frac{1}{2}\|f(t)\|_{2,\Omega}^2 \le C_f exp(-\mu t),\ \mu \ge \alpha,\ C_f = const. \qquad (3.7.8)$$

4 КВАЗИСЫЗЫҚТЫ ПАРАБОЛАЛЫҚ ТЕҢДЕУ ҮШІН ҚОЙЫЛҒАН КЕРІ ЕСЕПТІҢ ШЕШІМІНІҢ ТҰРПАТЫ

4.1 Есептің қойылымы

Бұл тарауда қайта анықтау арқылы берілген интегралдық шарты бар параболалық типті теңдеуге қойылған кері есепті қарастырамыз. Физикалық тұрғыдан алғанда, газдалған сұйықтықтың математикалық моделі болып табылады.

$Q_T = \{(x,t) : x \in \Omega, \ \ t \in (0,T)\}$ цилиндрінде дәрежесіне қатысты сызықты емес жылу өткізгіштік теңдеуі үшін қойылған кері есепті қарастырамыз:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(u + a_0|u|^{p-2}u\right) - \Delta u + a(x,t,u,\nabla u)\big) = |u|^{p-2}u + f(t)w(x),$$
$$x \in \Omega, \ \ 0 < t < T \qquad (4.1.1)$$

теңдеуін

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad (4.1.2)$$

бастапқы шартын

$$u|_{\partial\Omega\times(0,T)} = 0, \qquad (4.1.3)$$

шекаралық шартын

$$\int_\Omega (u + a_0\,|u|^{p-2}u)\omega\,dx = \varphi(t), \qquad 0 < t < T, \qquad (4.1.4)$$

қосымша интегралдық шартын қанағаттандыратын $(u(x,t), f(t))$ функциялар жұбын табуымыз керек. Мұндағы $\Omega \subset R^n, n \geq 1$ шенелген аймақ, $\partial\Omega$ шекарасы жеткілікті жатық, p және a_0 оң тұрақтылар, мұндағы $p \geq 2$. $\varphi(t)$ кейбір N_0, N_1 және N_2 нақты тұрақтылары үшін $0 < N_0 < \varphi(t) < N_1$ және $0 < N_0 < \varphi'(t) < N_2$ болатындай дифференциалданатын функция. $\omega(x), a(x,t,u,\nabla u)$ және $u_0(x)$ функциялары төмендегі шарттарды қанағаттандырады:

$$\int_\Omega \omega^2(x)\,dx = 1, \qquad \omega \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \cap L_p(\Omega) \cap L_{\frac{p}{p-1}}(\Omega) \cap L_2(\Omega),$$
$$2 \leq p < \frac{2n}{n-2}, \qquad (4.1.5)$$

$$\int_\Omega u_0 \cdot \omega\,dx = \varphi(0), \ u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap L_p(\Omega) \cap L_2(\Omega), \ 2 \leq p < \frac{2n}{n-2}. \qquad (4.1.6)$$

және $a_1 > 0, a_2 > 0$ тұрақтылары үшін келесі теңсіздік орынды:

$$|a(x,t,u,\nabla u)| \le a_1|\nabla u| + a_2|u|^{\frac{p}{2}}. \qquad (4.1.7)$$

Нәтижелерімізді алуда негізігі маңызы бар В.Калантаров-О.А. Ладыженскаяның [71] белгілі леммасын қолданамыз.

4.2 Шешімнің бар болуы

Лемма 4.1. (3.1.1) - (3.1.4) кері есебі келесі сызықты емес параболалық теңдеуге қойылған жүктелген тура есепке эквивалент.

$$\frac{\partial}{\partial t}(u + a_0|u|^{p-2}u) - \Delta u + a(x,t,u,\nabla u) = |u|^{p-2}u + F(t,u)\omega(x), x \in \Omega, 0 < t < T, \qquad (4.2.8)$$

$$u(x,0) = u_0(x) \quad \Omega \text{ -да}, \ u|_{\partial\Omega\times(0,T)} = 0, \qquad (4.2.9)$$

мұндағы

$$F(t,u) = \varphi'(t) + \int_\Omega \nabla u \nabla \omega \, dx + \int_\Omega a(x,t,u,\nabla u)\cdot\omega \, dx - \int_\Omega |u|^{p-2}u\cdot\omega \, dx. \qquad (4.2.10)$$

Дәлелдеуі. Шынымен, (4.1.1)-ден келесі шығады:

$$\int\limits_\Omega \frac{\partial}{\partial t}(u + a_0|u|^{p-2}u)\omega \, dx \ - \int\limits_\Omega \Delta u \, \omega \, dx + \int\limits_\Omega a(x,t,u,\nabla u)\omega \, dx =$$
$$= \int_\Omega |u|^{p-2}u\cdot\omega \, dx + f(t)\int_\Omega \omega^2(x) \, dx, \qquad (4.2.11)$$

егер (4.1.4) және (4.1.5) шарттар орындалса, онда

$$F(t,u) = \varphi'(t) - \int_\Omega u \, \Delta \, \omega \, dx + \int_\Omega a(x,t,u,\nabla u)\cdot\omega \, dx - \int_\Omega |u|^{p-2}u\cdot\omega \, dx. \qquad (4.2.12)$$

Сондықтан, (4.2.10) қатынас орындалады. Енді, (4.2.8)-(4.2.9) есепті қарастырамыз. Егер (4.2.10) қатынас орындалса, одан (4.2.12) теңдік айқын түрде шығады. Онда

$$F(t,u) = \varphi'(t) - \int_\Omega u\Delta\omega \, dx + \int_\Omega a(x,t,u,\nabla u)\cdot\omega \, dx - \int_\Omega |u|^{p-2}u\cdot\omega \, dx = \varphi'(t) - \int_\Omega \Delta u \, \omega \, dx + \int_\Omega a(x,t,u,\nabla u)\cdot\omega \, dx - \int_\Omega |u|^{p-2}u\cdot\omega \, dx.$$

(4.2.11) көмегімен келесіні аламыз:

$$\varphi'(t) - \int_\Omega u_t\omega \, dx = 0.$$

Осындай жолмен, $\frac{d}{dt}\left(\varphi(t) - \int_\Omega u\,\omega\,dx\right) = 0$ және $v(t)$ функциясын $v(t) = \varphi(t) - \int_\Omega u\,\omega\,dx$ арқылы белгілейміз. Сонда Коши есебінің шешімі ретінде $v(t)$ функциясын табуға болады $v'(t) = 0, v(0) = 0.$ ($v(0) = 0$ дегені (4.1.6)-ң келісім шартынан шығады). Есептің жалғыз шешімі $v(t) = 0$ функциясы болып табылады, сондықтан $\int_\Omega u\,\omega\,dx = \varphi(t)$. Лемма дәлелденді.

$V(Q_T)$ кеңістігі төмендегі түрде белгілейміз:

$$V(Q_T) = \left\{u\colon\ u \in L_2(Q_T) \cap L_\infty\big(0,T; L_2(\Omega)\big) \cap L_\infty\left(0,T; L_p(\Omega)\right), \nabla u \in L_2(Q_T)\right\}$$

және оған түйіндес $V^*(Q_T)$ кеңістігі.

Анықтама 4.1. (4.2.8)-(4.2.9) есептің әлсіз жалпылама шешімі $u(x,t)$ функциясы

$$u(x,t) \in V(Q_T), u_t(x,t) \in L_2\big(0,T; L_2(\Omega)\big), \left(|u|^{\frac{p}{2}}\right)'_t \in L_2(Q_T),$$

келесі теңдікті қанағаттандырады:

$$\int_{Q_T}\left(u'_t + a_0(p-1)\frac{2}{p}|u|^{\frac{p}{2}-2}u\left(|u|^{\frac{p}{2}}\right)'_t\right)\eta\,dx\,dt +$$
$$+\int_{Q_T}\nabla u\nabla\eta\,dx\,dt + \int_{Q_T}a(x,t,u,\nabla u)\eta\,dx\,dt -$$
$$-\int_{Q_T}|u|^{p-2}u\eta\,dx\,dt - \int_{Q_T}F(t,u)\omega(x)\eta\,dx\,dt = 0,$$

барлық $\eta(x,t) \in V(Q_T), \eta_t(x,t) \in V^*(Q_T)$ үшін.

Теорема 4.2. (4.1.5) - (4.1.7) шарттары орындалсын делік, онда (4.2.8), (4.2.9) есебінің, демек, (4.1.1) - (4.1.4) есебінің $[0,T_{max}) \subset [0,T)$ интервалында әлсіз шешімі бар болады.

$\dot{W}_2^1(\Omega) \cap \dot{W}_2^2(\Omega)$ кеңістігінде Δ операторының $\{\psi^k(x)\}$ меншікті функцияларының базисын аламыз:

$$\Delta\psi^k = \lambda_k\psi^k,\ \ \psi^k\big|_\Gamma = 0, \qquad (4.2.13)$$

және $L_2(\Omega)$ кеңістігінде нормаланған деп есептейміз. «Жуық шешімдерді» $u^N(t) = u^N(x,t), N = 1,2,...$, ақырлы қосынды түрінде құрастырамыз.

$$u^N(x,t) = \sum_{i=1}^N C_i^N(t)\psi_i(x), \qquad (4.2.14)$$

мұндағы $C_i^N(t), k = 1,2,\dots,N, t \in [0,T]$ белгісіз коэффициенттер. Бұл коэффициенттер Коши есебін шешу арқылы анықталады.

$$\Lambda\big(C_i^N\big)\frac{dC_i^N}{dt} = C_i(t, C_1^N, C_2^N, \dots, C_N^N), C_i^N(0) = \big(u_0(x), \psi_i(x)\big)_{L_2(\Omega)}; \qquad (4.2.15)$$

мұндағы

$$\Lambda\left(C_i^N\right) = \left\| a_{k_j}\left(C_i^N\right)\right\|_{k,j=1}^{N},$$
$$a_{k_j}\left(C_i^N\right) = \delta_{kj} + (p-1)\int_\Omega |u^N|^{p-2}\psi_k\psi_j\,dx,$$
$$\delta_{kj} = \begin{cases} 1, & k = j, \\ 0, & k \neq j, \end{cases}$$

$$C_i\left(t, C_{1,}^N C_2^N, \dots, C_N^N\right) = -\lambda_k C_i^N + \int_\Omega |u^N|^{p-2} u^N \psi_i\,dx +$$

$$+F(t, u^N)\int_\Omega \omega(x)\psi_i\,dx.$$

(4.2.16)-шы Коши есебі Пеано теоремасы бойынша $C_i^N(t) \in C^1[0, T_N]$ класында шешімі бар, қандай да бір $T_N > 0$ үшін және $i = 1, \dots, N$. (4.2.15)-ші теңдіктің екі жағын $C_i^N(t)$-ға көбейтеміз және $i = 1, \dots, N$ дейін қосындылаймыз. Келесі теңдік аламыз:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\|u^N\|_{2,\Omega}^2 + a_0\frac{p-1}{p}\|u^N\|_{p,\Omega}^p\right) + \|\nabla u^N\|_{2,\Omega}^2 +$$
$$+\int_\Omega a(x, t, u^N, \nabla u^N)u^N dx = \|u^N\|_{p,\Omega}^p + F(t, u^N)\int_\Omega u^N\,\omega\,dx,$$

Осы теңдіктен (4.1.5)-(4.1.7) функцияларының шарттарын ескере отырып, келесі теңсіздікті аламыз:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\|u^N\|_{2,\Omega}^2 + a_0\frac{p-1}{p}\|u^N\|_{p,\Omega}^p\right) + \|\nabla u^N\|_{2,\Omega}^2 \leq \|u^N\|_{p,\Omega}^p + a_1\|u^N\|_{2,\Omega}\|\nabla u^N\|_{2,\Omega} +$$
$$+a_2\|u^N\|_{p,\Omega}^{\frac{p}{2}}\|u^N\|_{2,\Omega} + |\varphi'|\,\|\omega\|_{2,\Omega}\,\|u^N\|_{2,\Omega} +$$
$$\|\nabla\omega\|_{2,\Omega}\,\|\omega\|_{2,\Omega}\,\|u^N\|_{2,\Omega}\,\|\nabla u^N\|_{2,\Omega} +$$
$$+a_1\|\omega\|_{2,\Omega}^2\,\|u^N\|_{2,\Omega}\,\|\nabla u^N\|_{2,\Omega} +$$
$$+a_2\|\omega\|_{2,\Omega}^2\,\|u^N\|_{p,\Omega}^{\frac{p}{2}}\,\|u^N\|_{2,\Omega} + \|u^N\|_{p,\Omega}^p\|\omega\|_{p,\Omega}\,\|\omega\|_{\frac{p}{p-1},\Omega} \leq$$
$$\leq \left(3 + \|\omega\|_{p,\Omega}\,\|\omega\|_{\frac{p}{p-1},\Omega}\right)\|u^N\|_{p,\Omega}^p + \frac{1}{4}|\varphi'|^2\,\|\omega\|_{2,\Omega}^2 + \left(2a_1^2 + \frac{a_2^2}{4} + 1\right)\|u^N\|_{2,\Omega}^2 +$$
$$+\frac{1}{2}\left(\|\nabla\omega\|_{2,\Omega}\,\|\omega\|_{2,\Omega} + a_1\|\omega\|_{2,\Omega}^2\right)^2\|u^N\|_{2,\Omega}^2 + \frac{1}{2}\|\nabla u^N\|_{2,\Omega}^2.$$

Осыдан теңсіздіктен шығатыны:

$$\frac{d}{dt}\left(\|u^N\|_{2,\Omega}^2 + 2a_0\frac{p-1}{p}\|u^N\|_{p,\Omega}^p\right) + \|\nabla u^N\|_{2,\Omega}^2 \leq$$
$$\leq C_1\left(\|u^N\|_{2,\Omega}^2 + 2a_0\frac{p-1}{p}\|u^N\|_{p,\Omega}^p\right) + \frac{1}{4}|\varphi'|^2\,\|\omega\|_{2,\Omega}^2.$$

Гронуолл леммасын қолдану арқылы келесі теңсіздікті аламыз:

$$\|u^N\|_{2,\Omega}^2 + 2a_0\frac{p-1}{p}\|u^N\|_{p,\Omega}^p + \int_0^t \|\nabla u^N\|_{2,\Omega}^2\,dt \le C_2, \qquad (4.2.16)$$

мұндағы C_2 тұрақтысы m-ге тәуелсіз. Енді (4.2.15) –ң екі жағын $\frac{dC_i^N(t)}{dt}$ -ға көбейтіп және $i = 1, \dots, N$ дейін қосындыла, келесі теңдікті аламыз:

$$\int_\Omega |u_t^N|^2\,dx + a_0(p-1)\int_\Omega |u^N|^{p-2}|u_t^N|^2 dx + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u^N\|_{2,\Omega}^2 +$$

$$+\int_\Omega a(x,t,u^N,\nabla u^N)\cdot u_t^N dx =$$

$$= \frac{1}{p}\cdot\frac{d}{dt}\|u^N\|_{p,\Omega}^p + F(t,u^N)\int_\Omega \omega(x)u_t^N dx.$$

Осы теңсіздікті уақытқа қатысты интегралдасақ, келесі теңдікті аламыз:

$$\int_{Q_t} |u_\tau^N|^2\,dxd\tau + a_0(p-1)\int_{Q_t} |u^N|^{\,p-2}\,|u_\tau^N|^2 dxd\tau + \frac{1}{2}\|\nabla u^N\|_{2,\Omega}^2 +$$

$$+\int_{Q_t} a(x,t,u^N,\nabla u^N)\cdot u_\tau^N dxd\tau =$$

$$=\frac{1}{p}\cdot\|u^N\|_{p,\Omega}^p + \int_0^t F(\tau,u^N)\int_\Omega \omega(x)u_\tau^N dx.$$

Соңғы теңдіктің оң жағын бағалап, алатынымыз:

$$\int_{Q_t} |u_\tau^N|^2\,dxd\tau + a_0\,(p-1)\int_{Q_t} |u^N|^{\,p-2}\,|u_\tau^N|^2 dxd\tau + \frac{1}{2}\,\|\nabla u^N\|_{2,\Omega}^2 \le$$

$$\le \frac{1}{p}\|u^N\|_{p,\Omega}^p + a_1\,\|u_\tau^N\|_{2,Q_t}\,\|\nabla u^N\|_{2,Q_t} +$$

$$+a_2\|u^N\|_{p,Q_t}^{\frac{p}{2}}\|u_\tau^N\|_{2,Q_t} + \int_0^t |\varphi'|\,\|\omega\|_{2,\Omega}\,\|u_\tau^N\|_{2,\Omega}\mathrm{d}\tau +$$

$$+\int_0^t \|\nabla\omega\|_{2,\Omega}\,\|\omega\|_{2,\Omega}\,\|u_\tau^N\|_{2,\Omega}\,\|\nabla u^N\|_{2,\Omega}\mathrm{d}\tau + a_1\int_o^t \|\omega\|_{2,\Omega}^2\,\|u_\tau^N\|_{2,\Omega}\,\|\nabla u^N\|_{2,\Omega}\mathrm{d}\tau +$$

$$+\ a_2\int_0^t \|\omega\|_{2,\Omega}^2\,\|u^N\|_{p,\Omega}^{\frac{p}{2}}\|u_\tau^N\|_{2,\Omega}\mathrm{d}\tau + \int_0^t \|u^N\|_{p,\Omega}^{p-1}\|u_\tau^N\|_{2,\Omega}\|\omega\|_{p,\Omega}\,\|\omega\|_{2,\Omega}\mathrm{d}\tau \le$$

$$\leq \frac{1}{p}\|u^N\|_{p,\Omega}^p + \frac{1}{2}\|u_\tau^N\|_{2,Q_t}^2 + \left(3a_1^2 + 3t\,\|\nabla\omega\|_{2,\Omega}^2\,\|\omega\|_{2,\Omega}^2 + 3a_1^2 t\,\|\omega\|_{2,\Omega}^4\right)\int_0^t \|\nabla u^N\|_{2,\Omega}^2 d\tau +$$

$$+3\|\omega\|_{2,\Omega}^2\int_0^t |\varphi'|^2\, d\tau + \left(3a_2^2 + 3a_2^2 t\|\omega\|_{2,\Omega}^4 + \|\omega\|_{p,\Omega}^2\,\|\omega\|_{2,\Omega}^2\right)\int_0^t \|u^N\|_{2,\Omega}^{2p-2} d\tau$$

Бұл дегеніміз

$$\int_{Q_t}|u_\tau^N|^2 dxdt + \int_{Q_t}|u^N|^{p-2}|u_t^N|^2\, dxdt + \|\nabla u^N\|_{2,\Omega}^2 \leq C_3(T), \qquad (4.2.17)$$

мұндағы $C_3(T)$ тұрақтысы m-ге тәуелсіз. Алынған (4.2.17)-ші бағалаулар [57]-гі m-де шекке көшуді жүзеге асыруға және 1-анықтама мағынасында (4.2.8), (4.2.9) есептің әлсіз шешімінің бар екендігін дәлелдеуге мүмкіндік береді.

4.3 Шешімнің ақырлы уақытта қирауы

Теорема 4.3. (4.1.5)-(4.1.7) шарттары орындалсын делік және сонымен қатар

$$-\gamma_2\alpha^{-1}\left(\frac{\sigma}{2p} + C_8\right) < \int_\Omega |u_0|^2 dx + \frac{2a_0(p-1)}{p}\int_\Omega |u_0|^p dx, \qquad (4.3.18)$$

мұндағы $C_8 > 0$. Сонда t_1 ақырлы уақыт үшін шешімнің нормасы шексіздікке ұмтылады.

$$\int_0^t\int_\Omega |u|^2 dxd\tau + \frac{2a_0(p-1)}{p}\int_0^t\int_\Omega |u|^p dxd\tau \to +\infty,\ t \to t_1.$$

Дәлелдеуі. $u = ve^{\lambda t}$ алмастыруын жасаймыз, онда (4.1.1) - (4.1.4) кері есебі келесі түрге келеді:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + a_0 e^{\lambda(p-2)t}\frac{\partial}{\partial t}(|v|^{p-2}v) + \lambda v + a_0\lambda\,(p-1)e^{\lambda(p-2)t}|v|^{p-2}v - \Delta v +$$
$$+e^{-\lambda t}a\left(x,t,e^{\lambda t}v, e^{\lambda t}\nabla v\right) = e^{\lambda(p-2)t}|v|^{p-2}\,v + e^{-\lambda t}f(t)\,\omega(x),,$$
$$x \in \Omega\ 0 < t < T, \qquad (4.3.19)$$

$$v(x,0) = u_0(x), \qquad (4.3.20)$$

$$v|_{\partial\Omega\times(0,T)} = 0, \qquad (4.3.21)$$

$$\int_\Omega\left(v + a_0 e^{\lambda(p-2)t}|v|^{p-2}v\right)\omega\, dx = e^{-\lambda t}\varphi(t),\ 0 < t < T. \qquad (4.3.22)$$

Алдымен (4.3.19) теңдеуді $\omega(x)$-қа көбейтіп, Ω облысы бойынша интегралдаймыз. Бұдан шығатыны:

$$e^{-\lambda t}f(t) = e^{-\lambda t}\varphi'(t) - \int_\Omega v\Delta\omega dx +$$
$$+\int_\Omega e^{-\lambda t}a\big(x,t,e^{\lambda t}v,e^{\lambda t}\nabla v\big)\omega dx - e^{\lambda(p-2)t}\int_\Omega |v|^{p-2}v\omega dx. \quad (4.3.23)$$

Енді, (4.3.19) теңдеуді v және $\frac{\partial v}{\partial t}$ көбейтіп, Ω облысы бойынша интегралдап келесі теңдіктерді аламыз:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |v|^2dx + \frac{a_0(p-1)}{p}\frac{d}{dt}\left(e^{\lambda(p-2)t}\int_\Omega |v|^p dx\right) -$$
$$-\frac{a_0\lambda(p-1)(p-2)}{p}e^{\lambda(p-2)t}\int_\Omega |v|^p dx +$$
$$+a_0\lambda(p-1)e^{\lambda(p-2)t}\int_\Omega |v|^p dx + \lambda\int_\Omega |v|^2dx + \int_\Omega |\nabla v|^2dx +$$
$$e^{-\lambda t}\int_\Omega a\big(x,t,e^{\lambda t}v,e^{\lambda t}\nabla v\big)vdx =$$
$$= e^{\lambda(p-2)t}\int_\Omega |v|^p dx + e^{-\lambda t}f(t)\int_\Omega v\,\omega dx. \quad (4.3.24)$$

$$\int_\Omega |v_t|^2dx + a_0(p-1)e^{\lambda(p-2)t}\int_\Omega |v|^{p-2}|v_t|^2dx + \frac{\lambda}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |v|^2dx +$$
$$+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla v|^2dx + \frac{a_0\lambda(p-1)}{p}\frac{d}{dt}\left(e^{\lambda(p-2)t}\int_\Omega |v|^p dx\right) - \quad (4.3.25)$$
$$+\frac{a_0\lambda^2(p-1)(p-2)}{p}e^{\lambda(p-2)t}\int_\Omega |v|^p dx + e^{-\lambda t}\int_\Omega a\big(x,t,e^{\lambda t}v,e^{\lambda t}\nabla v\big)v_t dx =$$
$$= \frac{1}{p}\frac{d}{dt}\left(e^{\lambda(p-2)t}\int_\Omega |v|^p dx\right) - \frac{\lambda(p-2)}{p}e^{\lambda(p-2)t}\int_\Omega |v|^p dx + e^{-\lambda t}f(t)\int_\Omega v_t\omega dx.$$

(4.3.23) –ші теңдеуді (4.3.24) және (4.3.25) теңдіктерге қойып, келесі қатынасты аламыз:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |v|^2dx + \frac{a_0(p-1)}{p}\frac{d}{dt}\left(e^{\lambda(p-2)t}\int_\Omega |v|^p dx\right)$$
$$+\frac{2a_0\lambda(p-1)}{p}e^{\lambda(p-2)t}\int_\Omega |v|^p dx +$$
$$+\lambda\int_\Omega |v|^2dx + \int_\Omega |\nabla v|^2dx + e^{-\lambda t}\int_\Omega a\big(x,t,e^{\lambda t}v,e^{\lambda t}\nabla v\big)vdx = \quad (4.3.26)$$
$$=e^{\lambda(p-2)t}\int_\Omega |v|^p dx + \Big(e^{-\lambda t}\varphi'(t) - \int_\Omega v\,\Delta\omega dx +$$
$$\int_\Omega e^{-\lambda t}a\big(x,t,e^{\lambda t}v,e^{\lambda t}\nabla v\big)\omega dx - e^{\lambda(p-2)t}\int_\Omega |v|^{p-2}v\,\omega dx\Big)\int_\Omega v\omega dx.$$

$$\int_\Omega |v_t|^2dx + a_0(p-1)e^{\lambda(p-2)t}\int_\Omega |v|^{p-2}|v_t|^2dx + \frac{\lambda}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |v|^2dx +$$
$$+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla v|^2dx + \frac{a_0\lambda(p-1)}{p}\frac{d}{dt}\left(e^{\lambda(p-2t)}\int_\Omega |v|^p dx\right) - \quad (4.3.27)$$
$$+\frac{a_0\lambda^2(p-1)(p-2)}{p}e^{\lambda(p-2)t}\int_\Omega |v|^p dx + e^{-\lambda t}\int_\Omega a\big(x,t,e^{\lambda t}v,e^{\lambda t}\nabla v\big)v_t dx =$$
$$= \frac{1}{p}\frac{d}{dt}\left(e^{\lambda(p-2)t}\int_\Omega |v|^p dx\right) - \frac{\lambda(p-2)}{p}e^{\lambda(p-2)t}\int_\Omega |v|^p dx +$$

$$+\left(e^{-\lambda t}\varphi'(t) - \int_\Omega v\,\Delta\omega dx + \int_\Omega e^{-\lambda t} a\left(x,t,e^{\lambda t}v, e^{\lambda t}\nabla v\right)\omega dx\ - \right.$$
$$\left. - e^{\lambda(p-2)t}\int_\Omega |v|^{p-2}\ v\ \omega dx\right)\int_\Omega v_t\omega dx.$$

Келесі белгілеулерді енгіземіз:

$$G(t,v) \equiv e^{\lambda(p-2)t}\int_\Omega |v|^p dx,$$
$$Lv \equiv \lambda\int_\Omega |v|^2 dx + \int_\Omega |\nabla v|^2 dx + \frac{2a_0\lambda(p-1)}{p} e^{\lambda(p-2)t}\int_\Omega |v|^p dx, \qquad (4.3.28)$$
$$J(t) \equiv \frac{1-a_0\lambda(p-1)}{p} G(t,v) - \frac{\lambda}{2}\int_\Omega\ |v|^2 dx - \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 dx,$$
$$\Psi_1(t) \equiv \int_\Omega |v|^2 dx + \frac{2a_0(p-1)}{p} e^{\lambda(p-2)t}\int_\Omega |v|^p dx.$$

(4.3.26) және (4.3.27) теңдеулерін жоғарғы белгілеулерді қолданып қайта жазамыз:

$$\frac{1}{2}\frac{d\Psi_1(t)}{dt} = 2pJ(t) + \frac{2a_0\lambda(p-1)^2 - p}{p}\ G(t,v) + \lambda(p-1)\int_\Omega |v|^2 dx +$$
$$+(p-1)\int_\Omega |\nabla_v|^2 dx - e^{-\lambda t} a\left(x,t,e^{\lambda t}v, e^{\lambda t}\nabla v\right) v dx + \qquad (4.3.29)$$
$$+\left(e^{-\lambda t}\varphi'(t) - \int_\Omega v\Delta\omega dx + \int_\Omega e^{-\lambda t} a\left(x,t,e^{\lambda t}v, e^{\lambda t}\nabla v\right)\omega dx\right.$$
$$\left. -\ e^{\lambda(p-2)t}\int_\Omega |v|^{p-2}\ v\ \omega dx\right)\int_\Omega v\omega dx.$$

$$\frac{dJ(t,v)}{dt} = \frac{2\lambda(p-2)\left(1 + a_0\lambda(p-1)\right)}{p} G(t,v) +$$
$$+\int_\Omega\ |v_t|^2 dx + a_0(p-1)e^{\lambda(p-2)t}\int_\Omega\ |v|^{p-2}|v_t|^2 dx + \qquad (4.3.30)$$
$$+e^{-\lambda t}\int_\Omega a\left(x,t,e^{\lambda t}v, e^{\lambda t}\nabla v\right) v_t dx -$$
$$-\left(e^{-\lambda t}\varphi'(t) - \int_\Omega v\Delta\omega dx + \int_\Omega e^{-\lambda t} a\left(x,t,e^{\lambda t}v, e^{\lambda t}\nabla v\right)\omega dx\right.$$
$$\left. - e^{\lambda(p-2)t}\int_\Omega |v|^{p-2}\ v\ \omega dx\right)\int_\Omega v_t\omega dx.$$

(4.3.29)-шы теңдіктін оң жағын бағалаймыз:

$$\left|\int_\Omega v\Delta\omega dx\int_\Omega v\omega dx\right|\le$$
$$\le\left(\int_\Omega|v|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega|\Delta\omega|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega|v|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega|\omega|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\le \tag{4.3.31}$$
$$\le C_1\int_\Omega|v|^2dx$$

$$\left|e^{-\lambda t}\varphi'(t)\int_\Omega v\omega dx\right|\le N_2e^{-\lambda t}\left(\int_\Omega|v|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega|\omega|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\le \tag{4.3.32}$$

$$\le\lambda(p-1)\int_\Omega|v|^2dx+\frac{N_2^2e^{-2\lambda t}}{4\lambda(p-1)}\|\omega\|_{2,\Omega}^2.$$

$$\left|e^{-\lambda t}\int_\Omega a\left(x,t,e^{\lambda t}v,e^{\lambda t}\nabla v\right)\omega dx\int_\Omega v\omega dx\right|\le a_1\int_\Omega|\nabla v||\omega|dx\int_\Omega|v||\omega|dx+ \tag{4.3.33}$$

$$+a_2e^{\frac{\lambda(p-2)t}{2}}\int_\Omega|v|^{\frac{p}{2}}|\omega|dx\int_\Omega|v||\omega|\mathrm{dx}\le a_1\|\nabla v\|_{2,\Omega}\|v\|_{2,\Omega}\|\omega\|_{2,\Omega}^2+$$
$$+a_2e^{\frac{\lambda(p-2)t}{2}}\|v\|_{2,\Omega}^{\frac{p}{2}}\|v\|_{2,\Omega}\|\omega\|_{2,\Omega}^2\le\frac{p-1}{2}\|\nabla v\|_{2,\Omega}^2+\frac{a_1^2}{2(p-1)}\|\omega\|_{2,\Omega}^4\|v\|_{2,\Omega}^2+$$

$$+\frac{2a_2\lambda(p-1)^2-p}{2p}e^{\lambda(p-2)t}\|v\|_{p,\Omega}^p+\frac{pa_2^2}{4a_0\lambda(p-1)^2-2p}\|\omega\|_{2,\Omega}^4\|v\|_{2,\Omega}^2. \tag{3.3.34}$$

$$\left|e^{-\lambda t}\int_\Omega a\left(x,t,e^{\lambda t}v,e^{\lambda t}\nabla v\right)vdx\right|\le a_1\int_\Omega|\nabla v||v|dx+$$
$$+a_2e^{\frac{\lambda(p-2)t}{2}}\int_\Omega|v|^{\frac{p}{2}}|v|dx\le a_1\|\nabla v\|_{2,\Omega}\|v\|_{2,\Omega}+a_2e^{\frac{\lambda(p-2)t}{2}}\|v\|_{p,\Omega}^{\frac{p}{2}}\|v\|_{2,\Omega}\le$$
$$\le\frac{p-1}{p}\|\nabla v\|_{2,\Omega}^2+\frac{a_1^2}{2(p-1)}\|v\|_{2,\Omega}^2+\frac{2a_2\lambda(p-1)^2-p}{2p}e^{\lambda(p-2)t}\|v\|_{p,\Omega}^p$$
$$+\frac{pa_2^2}{4a_0\lambda(p-1)^2-2p}\|v\|_{2,\Omega}^2.$$

$$\left|e^{\lambda(p-2)t}\int_\Omega|v|^{p-2}v\omega dx\int_\Omega v\omega dx\right|\le$$
$$\le e^{\lambda(p-2)t}\int_\Omega|v|^{p-1}|\omega|dx\int_\Omega|v||\omega|\le \tag{4.3.35}$$
$$\le e^{\lambda(p-2)t}\|v\|_{p,\Omega}^p\|\omega\|_{p,\Omega}\|\omega\|_{\frac{p}{p-1},\Omega}=C_2e^{\lambda(p-2)t}\|v\|_{p,\Omega}^p.$$

Алынған (4.3.31) - (4.3.35) бағалауларды (4.3.29)-ға апарып қоямыз, содан кейін алатынымыз:

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\Psi_1(t)}{dt}\ge 2pJ(t)-C_3\Psi_1(t)-\frac{N_2^2}{4\lambda(p-1)}\|\omega\|_{2,\Omega}^2e^{-2\lambda t}, \tag{4.3.36}$$

мұндағы

$$C_3=max\left\{C_1+\frac{a_1^2\left(1+\|\omega\|_{2,\Omega}^4\right)}{2(p-1)}+\frac{pa_2^2\left(1+\|\omega\|_{2,\Omega}^4\right)}{4a_0\lambda(p-1)^2-p};\ C_2\right\}. \tag{4.3.37}$$

Енді (4.3.30)-ң оң жағын бағалаймыз:

$$\left|\int_{\Omega} v\Delta\omega dx \int_{\Omega} v_t\omega dx\right| \leq$$
$$\leq \left(\int_{\Omega}|v|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\Omega}|\Delta\omega|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\Omega}|v_t|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\Omega}|\omega|^2dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq \qquad (4.3.38)$$
$$\leq C_4(\varepsilon_1)\int_{\Omega}|v|^2dx + \varepsilon_1\int_{\Omega}|v_t|^2dx$$

$$\left|e^{-\lambda t}\varphi'(t)\int_{\Omega} v_t\omega dx\right| \leq$$
$$\leq N_2e^{-\lambda t}\left(\int_{\Omega}|v_t|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\Omega}|\omega|^2dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq \qquad (4.3.39)$$
$$\leq \varepsilon_1\int_{\Omega}|v_t|^2dx\,\frac{N_2^2e^{-2\lambda t}}{4\varepsilon_1}\|\omega\|_{2,\Omega}^2.$$

$$\left|e^{-\lambda t}\int_{\Omega} a\left(x,t,e^{\lambda t}v,e^{\lambda t}\nabla v\right)\omega dx\int_{\Omega} v_t\omega dx\right| \leq$$
$$\leq\ a_1\int_{\Omega}|\nabla v||\omega|dx\int_{\Omega}|v_t||\omega|dx + \qquad (4.3.40)$$
$$+a_2e^{\frac{\lambda(p-2)t}{2}}\int_{\Omega}|v|^{\frac{p}{2}}|\omega|dx\int_{\Omega}|v_t||\omega|\mathrm{dx} \leq a_1\|\nabla v\|_{2,\Omega}\|v_t\|_{2,\Omega}\|\omega\|_{2,\Omega}^2 +$$
$$+a_2e^{\frac{\lambda(p-2)t}{2}}\|v\|_{2,\Omega}^{\frac{p}{2}}\|v_t\|_{2,\Omega}\|\omega\|_{2,\Omega}^2 \leq \frac{a_1^2}{4\varepsilon_1}\|\omega\|_{2,\Omega}^4\|\nabla v\|_{2,\Omega}^2 + \varepsilon_1\|v_t\|_{2,\Omega}^2 +$$
$$+\frac{a_2^2}{4\varepsilon_1}\|\omega\|_{2,\Omega}^4\,e^{\lambda(p-2)t}\|v\|_{p,\Omega}^p + \varepsilon_1\left\|v\quad_t\right\|_{2,\Omega}^2.$$

$$\left|e^{-\lambda t}\int_{\Omega} a\left(x,t,e^{\lambda t}v,e^{\lambda t}\nabla v\right)v_tdx\right| \leq$$
$$\leq a_1\int_{\Omega}|\nabla v||v_t|dx + a_2e^{\frac{\lambda(p-2)t}{2}}\int_{\Omega}|v|^{\frac{p}{2}}|v_t|\mathrm{dx} \leq$$
$$\leq a_1\|\nabla v\|_{2,\Omega}\|v_t\|_{2,\Omega} + a_2e^{\frac{\lambda(p-2)t}{2}}\|v\|_{2,\Omega}^{\frac{p}{2}}\|v_t\|_{2,\Omega} \leq \qquad (4.3.41)$$
$$\leq \frac{a_1^2}{4\varepsilon_1}\|\nabla v\|_{2,\Omega}^2 + \varepsilon_1\|v_t\|_{2,\Omega}^2 + \frac{a_2^2}{4\varepsilon_1}e^{\lambda(p-2)t}\|v\|_{p,\Omega}^p + \varepsilon_1\|v_t\|_{2,\Omega}^2.$$

$$\left|e^{\lambda(p-2)t}\int_{\Omega}|v|^{p-2}v\,\omega dx\int_{\Omega} v_t\omega dx\right| \leq \frac{1}{a_0}e^{-\lambda t}|\varphi(t)|\int_{\Omega}|v_t||\omega|dx +$$
$$+\frac{1}{a_0}\int_{\Omega}|v||\omega|dx\int_{\Omega}|v_t||\omega|dx \leq \qquad (4.3.42)$$
$$\leq \frac{N_1}{a_0}e^{-\lambda t}\|v_t\|_{2,\Omega}\|\omega\|_{2,\Omega} + \frac{1}{a_0}\|v_t\|_{2,\Omega}\|v\|_{2,\Omega}\|\omega\|_{2,\Omega}^2 \leq$$
$$\leq \varepsilon_1\|v_t\|_{2,\Omega}^2 + \frac{N_1^2}{a_0^2}\|\omega\|_{2,\Omega}^2e^{-2\lambda t} + \varepsilon_1\|v_t\|_{2,\Omega}^2 + \frac{1}{a_0^2}\|\omega\|_{2,\Omega}^4\|v\|_{2,\Omega}^2.$$

Алынған (4.3.38)-(4.3.42) бағалаулар (4.3.30)-шы теңдікке қоямыз және келесіні аламыз:

$$\frac{dJ\,(t,v)}{dt} \geq \left(\frac{2\lambda(p-2)\big(1+a_0\lambda(p-1)\big)}{p} - \frac{a_2^2}{4\varepsilon_1}\,\|\omega\|_{2,\Omega}^4 - \frac{a_2^2}{4\varepsilon_1}\right) G(t,v) +$$
$$+(1-8\varepsilon_1)\int_\Omega |v_t|^2 dx + a_0\,(p-1)e^{\lambda(p-2)t}\int_\Omega |v|^{p-2}|v_t|^2\,dx -$$
$$-\left(\frac{a_1^2}{4\varepsilon_1} + \frac{a_1^2}{4\varepsilon_1}\,\|\omega\|_{2,\Omega}^4\right)\|v_t\|_{2,\Omega}^2 - \left(C_4(\varepsilon_1) + \frac{1}{a_0^2}\,\|\omega\|_{2,\Omega}^4\right)\|v\|_{2,\Omega}^2 - \qquad (4.3.43)$$
$$-\left(\frac{N_2^2}{4\varepsilon_1}\,\|\omega\|_{2,\Omega}^2 + \frac{N_1^2}{a_0^2}\,\|\omega\|_{2,\Omega}^2\right)e^{-2\lambda t}.$$

Алынған (4.3.43) –ші теңсіздікті уақыт бойынша 0-ден t –ға дейін интегралдап және $1-e^{-2\lambda t}$ өрнегін 1-ден аспайды деп алсақ, келесі өрнекті аламыз:

$$J(t) \geq J(0) + (1-8\varepsilon_1)\int_0^t \int_\Omega |v_\tau|^2 dx d\tau$$
$$+ a_0(p-1)\int_0^t \int_\Omega e^{\lambda(p-2)\tau}|v|^{p-2}|v_\tau|^2 dx d\tau +$$
$$+\left(\frac{2\lambda(p-2)\big(1+a_0\lambda(p-1)\big)}{p} - \frac{a_2^2}{4\varepsilon_1}\,\|\omega\|_{2,\Omega}^4 - \frac{a_2^2}{4\varepsilon_1}\right)\int_0^t G\,(\tau,v)\,d\tau - \qquad (4.3.44)$$
$$-\left(\frac{a_1^2}{4\varepsilon_1} + \frac{a_1^2}{4\varepsilon_1}\,\|\omega\|_{2,\Omega}^4\right)\int_0^t \int_\Omega |\nabla v|^2 dx d\tau - \left(C_4(\varepsilon_1) + \frac{1}{a_0^2}\,\|\omega\|_{2,\Omega}^4\right)\int_0^t \|v\|_{2,\Omega}^2\,d\tau$$
$$- D_1,$$

мұндағы

$$D_1 = \frac{N_2^2}{8\lambda\varepsilon_1}\|\omega\|_{2,\Omega}^2 + \frac{N_2^2}{2\lambda a_0^2}\|\omega\|_{2,\Omega}^2\,. \qquad (4.3.45)$$

(4.3.28) теңдеуді пайдаланып (4.3.24) теңдікті төмендегідей қайта жазамыз:

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\Psi_1(t)}{dt} + Lv = G(t,v) - e^{-\lambda t}\int_\Omega a\big(x,t,e^{\lambda t}v, e^{\lambda t}\nabla v\big)\,v dx +$$
$$+\left(e^{-\lambda t}\varphi'(t) - \int_\Omega v\,\Delta\omega dx + \int_\Omega e^{-\lambda t}a\big(x,t,e^{\lambda t}v, e^{\lambda t}\nabla v\big)\,\omega dx -\right.$$
$$\left.- e^{\lambda(p-2)t}\int_\Omega |v|^{p-2}\,v\,\omega dx\right)\int_\Omega v\omega dx. \qquad (4.3.46)$$

(3.3.46)-ң оң жағын бағалаймыз:

$$\left|e^{-\lambda(p-1)t}\varphi(t)\int_\Omega v\,\Delta\omega dx\right| \leq$$
$$\leq N_1 e^{-\lambda(p-1)t}\left(\int_\Omega |v|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega |\Delta\omega|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq \qquad (4.3.47)$$

$$\le \frac{\lambda p}{4} e^{-\lambda(p-2)t} \int_\Omega |v|^2\, dx + \frac{N_1^2}{\lambda p} e^{-\lambda pt} \|\Delta\omega\|^2.$$

$$\left| e^{-\lambda t} \varphi'(t) \int_\Omega v\omega dx \right| \le$$

$$\le N_2 e^{-\lambda t} \left(\int_\Omega |v|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |\omega|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} \le \tag{4.3.48}$$

$$\le \lambda \int_\Omega |v|^2\, dx + \frac{N_2^2 e^{-2\lambda t}}{4\lambda} \|\omega\|_{2,\Omega}^2.$$

$$\left| e^{-\lambda t} \int_\Omega a\left(x, t, e^{\lambda t} v, e^{\lambda t} \nabla v\right) \omega dx \int_\Omega v\omega dx \right| \le$$

$$\le a_1 \int_\Omega |\nabla v|\ |\omega| dx \int_\Omega |v||\omega| dx + \tag{4.3.49}$$

$$+ a_2 e^{\frac{\lambda(p-2)t}{2}} \int_\Omega |v|^{\frac{p}{2}} |\omega| dx \int_\Omega |v||\omega| dx \le a_1 \|\nabla v\|_{2,\Omega} \|v\|_{2,\Omega} \|\omega\|_{2,\Omega}^2 +$$

$$+ a_2 e^{\frac{\lambda(p-2)t}{2}} \|v\|_{\mathrm{p},\Omega}^{\frac{p}{2}} \|v\|_{2,\Omega} \|\omega\|_{2,\Omega}^2 \le \frac{1}{4} \|\nabla v\|_{2,\Omega}^2 + a_1^2 \|\omega\|_{2,\Omega}^4 \|v\|_{2,\Omega}^2 +$$

$$+ e^{\lambda(p-2)t} \|v\|_{p,\Omega}^p + \frac{a_2^2}{4} \|\omega\|_{2,\Omega}^4 \|v\|_{2,\Omega}^2.$$

$$\left| e^{-\lambda t} \int_\Omega a\left(x, t, e^{\lambda t} v, e^{\lambda t} \nabla v\right) v dx \right| \le a_1 \int_\Omega |\nabla v|\ |v| dx +$$

$$+ a_2 e^{\frac{\lambda(p-2)t}{2}} \int_\Omega |v|^{\frac{p}{2}} |v| dx \le a_1 \|\nabla v\|_{2,\Omega} \|v\|_{2,\Omega} + \tag{4.3.50}$$

$$a_2 e^{\frac{\lambda(p-2)t}{2}} \|v\|_{\mathrm{p},\Omega}^{\frac{p}{2}} \|v\|_{2,\Omega} \le$$

$$\le \frac{1}{4} \|\nabla v\|_{2,\Omega}^2 + a_1^2 \|v\|_{2,\Omega}^2 + \frac{4a_0\lambda(p-1)}{p} e^{\lambda(p-2)t} \|v\|_{\mathrm{p},\Omega}^{\mathrm{p}} + \frac{a_2^2 p}{16 a_0 \lambda(p-1)} \|v\|_{2,\Omega}^2.$$

$$\left| e^{\lambda(p-2)t} \int_\Omega |v|^{p-2} v\ \ \omega dx \int_\Omega v\omega dx \right| \le \frac{1}{a_0} e^{-\lambda t} |\varphi(t)| \int_\Omega |v||\omega| dx +$$

$$+ \frac{1}{a_0} \int_\Omega |v||\omega| dx \int_\Omega |v||\omega| \mathrm{dx} \le \frac{N_1}{a_0} e^{-\lambda t} \|v\|_{2,\Omega} \|\omega\|_{2,\Omega} + \tag{4.3.51}$$

$$+ \frac{1}{a_0} \|v\|_{2,\Omega}^2 \|\omega\|_{2,\Omega}^2 \le \left(1 + \frac{1}{a_0} \|\omega\|_{2,\Omega}^2\right) \|v\|_{2,\Omega}^2 + \frac{N_1^2}{4a_0^2} \|\omega\|_{2,\Omega}^2 e^{-2\lambda t}.$$

Алынған (4.3.47) - (4.3.51) бағалауларды (4.3.24) теңдікке қолданып, төмендегіні аламыз:

$$\frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}\Psi_1(t)}{dt} + e^{-\lambda(p-2)t} \int_\Omega |\nabla v|^2 dx + \frac{\lambda p}{2} e^{-\lambda(p-2)t} \int_\Omega |v|^2 dx +$$

$$+ a_0 \lambda(p-1) \int_\Omega |v|^p dx \le G(t, v) + \frac{1}{4} e^{-\lambda(p-2)t} \int_\Omega |\nabla v|^2 dx +$$

$$+ (a_1^2 + a_2) e^{-\lambda(p-2)t} \int_\Omega |v|^2 dx + N_1 N_2 e^{-\lambda pt} +$$

$$+\frac{1}{4}e^{-\lambda(p-2)t}\int_\Omega|\nabla v|^2dx+(a_1N_1)^2e^{-\lambda pt}\|\omega\|^2+\frac{\lambda p}{4}e^{-\lambda(p-2)t}\int_\Omega|v|^2dx+$$
$$+\frac{(a_1N_1)^2}{\lambda p}e^{-\lambda pt}\|\omega\|^2+\left(a_0\lambda(p-1)+\frac{2a_0(p-1)(a_1^2+a_2)}{p}\right)\int_\Omega|v|^pdx$$
$$+C_6e^{-\lambda pt}\int_\Omega|\omega|^pdx+$$
$$+\frac{\lambda p}{4}e^{-\lambda(p-2)t}\int_\Omega|v|^2dx+\frac{N_1^2}{\lambda p}e^{-\lambda pt}\|\Delta\omega\|^2+G(t,v)+C_7e^{-\lambda pt}\int_\Omega\|\omega\|^{q+2}dx.$$

Соңғы теңсіздікті күшейтеміз.

$$\frac{1}{2}\frac{d\Psi_1(t)}{dt}+\frac{1}{2}\int_\Omega|\nabla v|^2\le 2G(t,v)+C_4\Psi_1(t)+\left(\frac{N_1^2}{4a_0^2}\|\omega\|_{2,\Omega}^2+\frac{N_2^2}{4\lambda}\|\omega\|_{2,\Omega}^2\right)e^{-2\lambda t}. \quad (4.3.52)$$

(4.3.53)-ші теңсіздікті уақытқа қатысты 0-ден t-ға дейін интегралдап алатынымыз:

$$\frac{1}{2}\Psi_1(t)+\frac{1}{2}\int_0^t\int_\Omega|\nabla v|^2dxd\tau\le\frac{1}{2}\Psi_1(0)+2\int_0^tG(\tau,v)d\tau+$$
$$+C_4\int_0^t\Psi_1(\tau)d\tau+D_2, \quad (4.3.53)$$

мұндағы

$$D_2=\frac{N_1^2}{8\lambda a_0^2}\|\omega\|_{2,\Omega}^2+\frac{N_2^2}{8\lambda^2}\|\omega\|_{2,\Omega}^2. \quad (4.3.54)$$

(4.3.53)-ші теңсіздікті 2-ге көбейтіп, келесі бағалауды аламыз:

$$\int_0^t\int_\Omega|\nabla v|^2dxd\tau\le\Psi_1(0)+4\int_0^t\mathrm{G}(\tau,v)d\tau+2C_4\int_0^t\Psi_1(\tau)d\tau+2D_2,$$

(4.3.55) –ші бағалауды (4.3.44)-ші теңсіздікке қолданып келесіні аламыз:

$$J(t)\ge(1-8\varepsilon_1)\int_0^t\int_\Omega|v_\tau|^2dxd\tau+$$
$$+a_0(p-1)\int_0^t\int_\Omega e^{\lambda(p-2)\tau}|v|^{p-2}|v_\tau|^2dxd\tau+ \quad (4.3.56)$$
$$+\left(\frac{2\lambda(p-2)(1+a_0\lambda(p-1))}{p}-\frac{a_2^2}{4\varepsilon_1}\|\omega\|_{2,\Omega}^4-\frac{a_2^2}{4\varepsilon_1}-4\left(\frac{a_1^2}{4\varepsilon_1}+\frac{a_1^2}{4\varepsilon_1}\|\omega\|_{2,\Omega}^4\right)\right)$$
$$\int_0^t\mathrm{G}(\tau,v)d\tau-2C_4\left(\frac{a_1^2}{4\varepsilon_1}+\frac{a_1^2}{4\varepsilon_1}\|\omega\|_{2,\Omega}^4\right)\int_0^t\Psi_1(\tau)d\tau-$$
$$-\left(C_4(\varepsilon_1)+\frac{1}{a_0^2}\|\omega\|_{2,\Omega}^4\right)\int_0^t\|v\|_{2,\Omega}^2d\tau+D_3,$$

мұндағы

$$D_3 = J(0) - \left(\frac{a_1^2}{4\varepsilon_1} + \frac{a_1^2}{4\varepsilon_1}\|\omega\|_{2,\Omega}^4\right)(\Psi_1(0) + 2D_2) - D_1 =$$
$$= J(0) - D_1 - \left(\frac{a_1^2}{4\varepsilon_1} + \frac{a_1^2}{4\varepsilon_1}\|\omega\|_{2,\Omega}^4\right) \cdot$$
$$\left(\int_\Omega |u_0|^2 dx + \frac{2a_0(p-1)}{p}\int_\Omega |u_0|^p dx + 2D_2\right). \qquad (4.3.57)$$

Егер төмендегі теңсіздік орындалса

$$C_5 \equiv \frac{2\lambda(p-2)\left(1+a_0\lambda(p-1)\right)}{p} - \frac{a_2^2}{4\varepsilon_1}\|\omega\|_{2,\Omega}^4 - \frac{a_2^2}{4\varepsilon_1} - 4\left(\frac{a_1^2}{4\varepsilon_1} + \frac{a_1^2}{4\varepsilon_1}\|\omega\|_{2,\Omega}^4\right) \geq 0, \qquad (4.3.58)$$

онда

$$J(t) \geq (1-8\varepsilon_1)\int_0^t \int_\Omega |v_\tau|^2 dxd\,\tau + a_0(p-1) \cdot \qquad (4.3.59)$$
$$\cdot \int_0^t \int_\Omega e^{\lambda(p-2)\tau}|v|^{p-2}|v_\tau|^2 dxd\tau + C_5\int_0^t G(\tau, v)d\tau - C_6\int_0^t \Psi_1(\tau)d\tau + D_3\,,$$

мұндағы

$$C_6 = 2C_4\left(\frac{a_1^2}{4\varepsilon_1} + \frac{a_1^2}{4\varepsilon_1}\|\omega\|_{2,\Omega}^4\right) + C_4(\varepsilon_1) + \frac{1}{a_0^2}\|w\|_{2,\Omega}^4. \qquad (4.3.60)$$

Алынған (4.3.59)-шы бағалауды (4.3.36) –шы теңсіздікке қолдансақ, онда:

$$\frac{1}{2}\frac{d\Psi_1(t)}{dt} \geq 2pJ(t) - C_3\Psi_1(t) - \frac{N_2^2}{4\lambda(p-1)}\|w\|_{2,\Omega}^2 e^{-2\lambda t} \geq$$
$$2(1-8\varepsilon_1)p\int_0^t \int_\Omega |v_\tau|^2 dxd\tau + 2a_0p(p-1) \cdot$$
$$\int_0^t \int_\Omega e^{\lambda(p-2)\tau}|v|^{p-2}|v_\tau|^2 dxd\tau + 2C_5p\int_0^t G(\tau, v)d\tau - 2C_6p\int_0^t \Psi_1(\tau)d\tau +$$
$$2D_3p - C_3\Psi_1(t) - \frac{N_2^2}{2}\|w\|_{2,\Omega}^2 e^{-2\lambda t}. \qquad (4.3.61)$$

Төмендегі арқылы белгілеу енгіземіз:

$$\Psi_2(t) = \int_0^t \int_\Omega |v|^2 dxd\,\tau + \frac{2a_0(p-1)}{p} + \int_0^t \int_\Omega e^{\lambda(p-2)\tau}|v|^p\,dxd\tau + \frac{\sigma}{2p} + C_8, \quad (4.3.62)$$
$$J_2(t) = \int_0^t \int_\Omega |v|^2 dxd\,\tau + a_0(p-1)\int_0^t \int_\Omega e^{\lambda(p-2)\tau}|v|^{p-2}|v_\tau|^2\,dxd\tau$$
$$+ C_5\int_0^t \int_\Omega e^{\lambda(p-2)\tau}|v|^p\,dxd\tau + \sigma,$$

мұндағы $C_8 > 0, \sigma = \int_\Omega |u_0|^2 dx + \frac{2a_0(p-1)}{p}\int_\Omega |u_0|^p dx.$

(4.3.61)-ші теңсіздікті $\Psi_2(t)$ арқылы жазуға болады.

$$\Psi_2{}''(t) \geq 4p(1-8\varepsilon_1)\int_0^t \int_\Omega |\, v_\tau|^2 dxd\tau + 4a_0 p\,(p-1)\cdot$$

$$(1-8\varepsilon_1)\int_0^t \int_\Omega e^{\lambda(p-2)\tau}|v|^{p-2}|v_\tau|^2\, dxd\tau + 4C_5 p(1-8\varepsilon_1)\cdot$$

$$\int_0^t \mathrm{G}(\tau, v)d\tau - 4C_6 p\Psi_2(t) + 4D_3 p - 2C_3\Psi'{}_2(t) - \qquad (4.3.63)$$

$$-\frac{N_2^2}{2\lambda(p-1)}\|w\|_{2,\Omega}^2 e^{-2\lambda t} + 2C_6 p\left(\frac{\sigma}{2p}+C_8\right).$$

Енді, $|\Psi'{}_2(t)|^2$ өрнегін бағалай отырып, Коши-Буняковский теңсіздігін қолданамыз, бұдан шығатыны:

$$|\Psi'{}_2(t)|^2 \leq \left(2\int_0^t \int_\Omega vv_\tau dxd\tau\right.$$

$$+\, 2a_0(p-1)\int_0^t \int_\Omega e^{\frac{\lambda(p-2)\tau}{2}}|v|^{\frac{p-2}{2}}v_\tau e^{\frac{\lambda(p-2)\tau}{2}}|v|^{\frac{p}{2}}dxd\tau +$$

$$\left. +\,\lambda(p-2)\int_0^t \int_\Omega e^{\lambda(p-2)\tau}|v|^p dxd\tau + \sigma\right)^2 \leq$$

$$\leq \left(2\|v\|_{2,Q_t}\|v_\tau\|_{2,Q_t} + 2a_0(p-1)\left(\int_0^t \int_\Omega e^{\lambda(p-2)\tau}|v|^{p-2}|v_\tau|^2\, dxd\tau\right)^{\frac{1}{2}}\right.$$

$$\left.\left(\int_0^t \int_\Omega e^{\lambda(p-2)\tau}|v|^p dxd\tau\right)^{\frac{1}{2}} + \lambda(p-2)\int_0^t \int_\Omega e^{\lambda(p-2)\tau}|v|^p dxd\tau + \sigma\right)^2$$

$$\leq \left(4\int_0^t \int_\Omega |v|^2 dxd\tau + 4a_0(p-1)\int_0^t \int_\Omega e^{\lambda(p-2)\tau}\,|v|^p dxd\tau + \sigma\right)\cdot$$

$$\cdot\left(\int_0^t\int_\Omega |v_\tau|^2 dxd\tau + a_0(p-1)\int_0^t\int_\Omega e^{\lambda(p-2)\tau}|v|^{p-2}|v_\tau|^2 dxd\tau\right.$$

$$\left. + \lambda(p-2)\int_0^t\int_\Omega e^{\lambda(p-2)\tau}|v|^p dxd\tau + \sigma\right) \le$$

$$\le 2p\left(\frac{2}{p}\int_0^t\int_\Omega |v|^2 dxd\tau + \frac{2a_0(p-1)}{p}\int_0^t\int_\Omega e^{\lambda(p-2)\tau}|v|^p dxd\tau + \frac{\sigma}{2p}\right)\cdot$$

$$\cdot\left(\int_0^t\int_\Omega |v_\tau|^2 dxd\tau + a_0(p-1)\int_0^t\int_\Omega e^{\lambda(p-2)\tau}|v|^{p-2}|v_\tau|^2 dxd\tau\right.$$

$$\left. + C_5\int_0^t\int_\Omega e^{\lambda(p-2)\tau}|v|^p dxd\tau + \sigma\right)$$

$$\le 2p\left(\int_0^t\int_\Omega |v|^2 dxd\tau + \frac{2a_0(p-1)}{p}\int_0^t\int_\Omega e^{\lambda(p-2)\tau}|v|^p dxd\tau + \frac{\sigma}{2p}\right.$$

$$\left. + C_8\right)J_2(t) = 2p\Psi_2(t)J_2(t),$$

Егер (4.3.63)-ші қатынасында $\varepsilon_1 = \frac{1}{32}$ деп ауыстырылса, онда келесі пішінде жазуға болады:

$$\Psi''_2(t)\Psi_2(t) - \frac{3}{2}[\Psi'_2(t)]^2 \ge -4C_6p\Psi_2^2(t) - 2C_3p\Psi'_2(t)\Psi_2(t)$$

$$+\left(4C_6p\left(\frac{\sigma}{2p} + C_8\right) + 2C_3\left(\frac{\sigma}{2p} + C_8\right) + 4pD_3 - \frac{N_2^2}{2\lambda(p-1)}\|w\|_{2,\Omega}^2 e^{-2\lambda t} +\right.$$

$$\left. 2C_6p\left(\frac{\sigma}{2p} + C_8\right)\right)\Psi_2(t). \qquad (4.3.64)$$

Келесі теңсіздік орындалатындай етіп $C_8 > 0$ таңдау керек.

$$\left(4C_6p\left(\frac{\sigma}{2p} + C_8\right) + 2C_3\left(\frac{\sigma}{2p} + C_8\right) + 4pD_3 - \frac{N_2^2}{2\lambda(p-1)}\|w\|_{2,\Omega}^2 e^{-2\lambda t} +\right.$$

$$\left. 2C_6p\left(\frac{\sigma}{2p} + C_8\right)\right) > 0,$$

бұл дегеніміз:

$$C_8 \geq \frac{\frac{N_2^2}{2\lambda(p-1)}\|w\|_{2,\Omega}^2 - (4pC_6 + 2C_3)\frac{\sigma}{2p} - 4pD_3 - C_6\sigma}{6pC_6 + 2C_3}$$

онда (4.3.64) теңсіздігі төмендегі түрде ықшамдалады:

$$\Psi_2''(t)\Psi_2(t) - (1+\alpha)[\Psi_2'(t)]^2 \geq -2\tilde{C}_1\Psi_2'(t)\Psi_2(t) - 2\tilde{C}_2\Psi_2^2(t), \quad (3.3.65)$$

мұндағы $\alpha = \frac{1}{2}$, $\tilde{C}_1 = C_3$, $\tilde{C}_2 = 2C_6$. Лемманың шартынан шығатыны:

$$\Psi_2'(0) + \gamma_2\alpha^{-1}\Psi_2(0) > 0$$

$$-\gamma_2\alpha^{-1}\left(\frac{\sigma}{2p} + C_8\right) < \int_\Omega |u_0|^2 dx + \frac{2a_0(p-1)}{p}\int_\Omega |u_0|^p dx,$$

онда $\Psi_2(t)$ функциясы $t \to t_1$ үшін шексіздікке ұмтылады. Осылайша, кері есептің шешімі ақырлы уақытта қирайды. Демек, біздің теорема дәлелденді.

4.4 Шешімнің орнықтылығы

Келесі есепті қарастырайық:

$$\frac{\partial}{\partial t}(u + a_0|u|^{p-2}u) - \Delta u + |u|^{p-2}u = f(t)\omega(x), x \in \Omega, t > 0, \quad (4.4.66)$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad (4.4.67)$$

$$u|_{\partial\Omega\times(0,\infty)} = 0, \quad (4.4.68)$$

$$\int_\Omega u\,\omega\,dx = \varphi(t), \quad t > 0, \quad (4.4.69)$$

мұндағы $\Omega \subset R^n$, $n > 1$ шенелген аймақ, $\partial\Omega$ шекарасы жеткілікті жатық, $p > 2$ болатындай p оң сан. $\omega(x)$, u_0 функциялары (5) және (6) шарттарды қанағаттандырады. $\varphi(t)$ және $\varphi'(t)$ төмедегі шарттарды қанағаттандыратын теріс емес функциялар

$$\varphi(t), \varphi'(t) \in L_1(0,\infty), \ \varphi(t) \text{ және } \varphi'(t) \ t \to \infty \quad (4.4.70)$$

ұмтылғанда 0-ге ұмтылатын функциялар.

Теорема 4.4. (4.1.5), (4.1.6) және (4.4.70) шарттар орындалсын, онда $t \to \infty$ ұмтылғанда (4.4.66)-(4.4.69) кері есеп нормасының шешімі 0-ге ұмтылады, яғни

$$\lim_{t\to\infty}(\,\|\nabla u\|^2 + \|u\|_{p,\Omega}^p) = 0. \qquad (4.4.71)$$

Дәлелдеуі. Бұл теореманың дәлелі [69] әдісімен де қолданылады. (66) теңдеуді $\omega(x)$-қа көбейтеміз және Ω облысы бойынша интегралдаймыз, бұдан алатынымыз:

$$f(t) = \varphi'(t) + \int_\Omega \nabla u\, \nabla\omega dx + \int_\Omega |u|^{p-2}u\, \omega dx. \qquad (4.4.72)$$

(4.4.72) қатынасты (4.4.66) орнына қойсақ келесі теңдеу шығады:

$$\frac{\partial}{\partial t}(u + a_0|u|^{p-2}u\,) - \Delta u + |u|^{p-2}u =$$
$$\left(\varphi'(t) + \int_\Omega \nabla u\, \cdot\, \nabla\omega dx + \int_\Omega |u|^{p-2}u\, \omega dx\right)\omega(x), x \in \Omega,\ t > 0. \quad (4.4.73)$$

Енді (4.4.73) –ті u –ға көбейтіп және Ω облысы бойынша интегралдап келесі теңдікті аламыз:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\|u\|^2 + a_0\frac{p-1}{p}\|u\|_{p,\Omega}^p\right) + \|\nabla u\|^2 + \|u\|_{p,\Omega}^p =$$
$$= \left(\varphi'(t) + \int_\Omega \nabla u \nabla\omega dx + \int_\Omega |u|^{p-2}u\, \omega dx\right)\int_\Omega uwdx.$$

Оң жағын бағалай отырып табатынымыз:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\|u\|_{2,\Omega}^2 + a_0\frac{p-1}{p}\|u\|_{p,\Omega}^p\right) + \frac{1}{2}\|\nabla u\|_{2,\Omega}^2 + \frac{1}{2}\|u\|_{p,\Omega}^p \le \left|\varphi'^{(t)}\varphi(t)\right| +$$
$$\frac{1}{2}\|\nabla\omega\|_{2,\Omega}^2|\varphi(t)|^2 + \frac{1}{2}|\varphi(t)|^2\int_\Omega |\omega|^{\frac{p}{p-1}}dx.$$

Пуанкаре – Фридрих теңсіздігін қолданамыз:

$$\|\nabla u\|^2 \ge \lambda_1^2\|u\|^2,$$

бұдан алатынымыз:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\|u\|_{2,\Omega}^2 + a_0\frac{p-1}{p}\|u\|_{p,\Omega}^p\right) + C_3\left(\frac{1}{2}\|u\|_{2,\Omega}^2 + a_0\frac{p-1}{p}\|u\|_{p,\Omega}^p\right) \le$$
$$|\varphi'(t)\varphi(t)| + \frac{1}{2}\|\nabla\omega\|_{2,\Omega}^2\,|\varphi(t)|^2 + \frac{1}{2}|\varphi(t)|^2\int_\Omega |\omega|^{\frac{p}{p-1}}dx.$$

Мұндағы $C_3 = min\{\lambda_1, 1\}$ және λ_1 біртекті Дирихле шартындағы Лаплас операторының бірінші меншікті мәні. Келесі түрде белгілеу енгіземіз:

$$E(t) \equiv \frac{1}{2}\|u\|_{2,\Omega}^2 + a_0\frac{p-1}{p}\|u\|_{p,\Omega}^p$$

$$\Phi(t) \equiv |\varphi'(t)\varphi(t)| + \frac{1}{2}\|\nabla\omega\|_{2,\Omega}^2 |\varphi(t)|^2 + \frac{1}{2}|\varphi(t)|^2 \int_\Omega |\omega|^{\frac{p}{p-1}} dx.$$

Сонда (3.4.74) теңсіздігі келесі түргеықшамдалады:

$$\frac{d}{dt}E(t) + C_3E(t) \leq \Phi(t). \qquad (4.4.75)$$

$\varphi(t) \leq C\exp(-\mu t), \mu > C_3$ болған жағдайды қарастырамыз. (4.4.75) теңсіздігінде белгілі Гроноулл леммасын қолданып, (4.1.5), (4.1.6) және (4.4.70) шарттары бойынша ол төмендегідей болады:

$$E(t) \leq \exp(-C_3t)\left(E(0) + \frac{C}{\mu - C_3}\right), \mu > C_3,$$
$$E(t) \leq \exp(-C_3t)\,(E(0) + Ct), \mu = C_3.$$

Осылайша шешімнің көрсеткіштік заңға сәйкес кемитіндігі дәлелденді.

5 СЫЗЫҚТЫ ЕМЕС КРОСС-ДИФФУЗИЯСЫ БАР БӘСЕКЕЛЕСТІК ЖҮЙЕСІ: НАҚТЫ МЕРЗІМДІ ПАТТЕРНДАР

5.1 Есептің қойылымы

Кросс-диффузиясы бар реакциялық-диффузия жүйелері жаратылыстану және әлеуметтік ғылымдардың бірнеше салаларында пайда болды: плазма физикасы, химиялық және биологиялық жүйелер, популяция динамикасы, экологияның бірнеше салсасында. Тәжірибелер туралы, модельдердің туындылары туралы және әртүрлі қолданбалар туралы ақпараттарды мысалға [73, 75, 76, 78–83] жұмыстарынан алуға болады. Ыңғайлы болу үшін популяция динамикасының терминологиясын қолданып, «екі түрдің эволюциясы» туралы айтатын боламыз.

Бізді қызықтыратын модельдік жүйе келесі сызықты емес реакция-диффузия жүйесі ретінде беріледі:

$$\begin{cases} u_t = (uu_x + \varepsilon_1 uv_x + \varepsilon_3 vu_x)_x + u(1-u-cv) := -\frac{\partial}{\partial x} J_1 + u(1 - u - cv), \\ v_t = (dvv_x + \varepsilon_4 uv_x + \varepsilon_2 vu_x)_x + v(a - bu - v) := -\frac{\partial}{\partial x} J_2 + v(a - bu - v). \end{cases} \quad (5.1.1)$$

Мұндағы «кросс-диффузия» термині J_i ағындарының кем дегенде бірінде u_x және v_x градиенттерінің екеуі де болуы керек дегенді білдіреді, яғни ε_1 немесе ε_2 (немесе екеуі де) нөлден өзгеше. Жүйелердің бұл түрі алғаш рет 1979 жылы [79] жұмыста енгізілді. Негізгі идея тек қана кездейсоқ дисперсияны ғана ескеру қажет болатын процестерді ғана емес, сонымен қатар, қоршаған орта жағдайлары, өзара тартымды немесе итермелейтін (түр аралық) және түр ішіндегі (бір түрдегі дараларының арасында кездеседі) өзара әрекеттесуі туралы басқа да факторларды модельдеу болып табылады.

(5.1.1)-гі барлық айнымалылар мен параметрлер өлшемсіз. Масштабтау реакция мүшелері ең дәстүрлі пішінге ие болатындай және кейбір ε_i таңдауымен қолданбаларда маңызды кейбір арнайы жүйелерге оралатындай етіп жүзеге асырылады.

Бұл контекстегі $(u,v) = \big(u(x,t), v(x,t)\big)$ өрнегі t уақытындағы және x нүктесіндегі екі түрдің популяция тығыздығын көрсетеді. a, b, c жарыс параметрлерін және d өзіндік диффузия параметрін оң деп есептейміз. Дегенмен, кросс-диффузия параметрлері ε_i кез-келген нақты сандар болуы мүмкін.

«Паттерн» деп қандай да бір мағынада «орнықты» болатын (5.1.1) тұрақты емес $\big(u(x), v(x)\big)$ стационарлық шешімін түсінеміз (оны кейінірек көрсетеміз); сондай-ақ, [74] жұмыста әртүрлі диффузиялық терминдерді енгізу туралы мотивация - әдісін табуға болады. Теріс емес және периодты болып табылатын екі түрлі паттернді ұсынамыз және бар екенін көрсетеміз.

Біріншісін «бір фазалы », екіншісін «екі фазалы» паттерн деп атаймыз.

Бұл бірінші жағдайда $u(x)$ және $v(x)$ минимумдары мен максимумдары бір нүктеде, ал екінші жағдайда $u(x)$ минимумдары $v(x)$ максимумдарымен сәйкес келеді және керісінше.

Бірінші типті паттерн бәсекелестік жүйелерге тән емес екенін ескереміз; шын мәнінде біз мұндай құбылыстың бар екендігі туралы ешқашан естіген емеспіз: олар өте ерекше кросс-диффузия мен реакция болған жағдайда ғана мүмкін болуы мүмкін.

5.2 Бір фазалы периодты паттерндар

Тәжірибеде (5.1.1)-ң тұрақты емес стационар шешімдері $\big(u(x,t),v(x,t)\big) = \big(u(x),v(x)\big)$ түрінде болатындай қандай жорамалдарды енгізу керектігін білу маңызды. Бұл шешім екінші ретті сызықты емес қарапайым дифференциалдық теңдеулер (ҚДТ) жүйесінің жұбын қанағаттандыруы керек:

$$\begin{cases} (uu' + \varepsilon_1 uv' + \varepsilon_3 vu')' + u(1 - u - cv) = 0 \\ (dvv' + \varepsilon_4 uv' + \varepsilon_2 vu')' + v(a - bu - v) = 0 \end{cases} \qquad (x \in R), \qquad (5.2.1)$$

мұндағы / белгісі x айнымалысына қатысты туынды. Теріс емес периодты $\big(u(x),v(x)\big)$ бар екенің көрсеткіміз келеді. Ол үшін нақты шешімдерді табамыз. Әрине, бұл паттерндар барлық параметрлер үшін табылмайды: «типтік» жағдайда t шексіздікке ұмтылғанда (5.1.1) шешімдері тұрақты шешімдерге ұмтылады деп айтуға болады.

Құрамында параметрлері бар сызықты емес реакция-диффузиялық жүйелер теориясындағы негізгі қиындықтардың бірі - шешімдердің әр түрлі әрекеті бар аймақтарды бөлетін параметрлі кеңістіктегі бифуркациялық беттерді табу (бір параметр болған жағдайда бифуркация нүктесін жалпылау). Нақты шешімдер физикалық тұрғыдан маңызды, теріс емес, периодты және т.б. Бұл параметрлер біршама күрделі сызықты емес алгебралық теңсіздіктер жүйесін қанағаттандырған жағдайда ғана болады. Бұл жүйенің шешімдері параметр кеңістігіндегі аймақтар болып табылады.

Бірінші нәтижені көрсету үшін біз (5.2.1) қарапайым дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін стационарлы тұрақты емес периодты $\big(u(x),v(x)\big)$ шешімді келесі түрде іздейміз:

$$\big(u(x),v(x)\big) = \big(u_0 cos^2(\omega x), v_0 cos^2(\omega x)\big), \qquad (5.2.2)$$

мұндағы $u_0 > 0, v_0 > 0$ оң тұрақтылар, $\omega \in R$. $u(x)$ және $v(x)$ жұптарының ең үлкен және ең кіші мәндері бір нүктеде орналасқандықтан, периодтық шешімдердің бұл түрін бір фазалы шешімдер деп атаймыз.

(5.2.1)-ң бірінші теңдеуіне (5.2.2)- ді апарып қоямыз. Туындыларды орындап, тригонометриялық теңдіктерді қолданып болған соң, тек $cos^2(\omega x)$ функциясының дәрежелері көрінетін теңдеу аламыз. Бұл теңдеуді $u_0 cos^2(\omega x)$

функциясына бөліп және $cos^2(\omega x)$ коэффициенті кіретін мүшелерді және тұрақтыларды жинасақ, мынаны аламыз:

$$\begin{cases}(-8\,\varepsilon_1\omega^2 v_0 - 8\,\varepsilon_3\omega^2 v_0 - 8\,\omega^2 u_0 - cv_0 - u_0)\cos^2(\omega\, x) + \\ \quad +6\,\varepsilon_1\omega^2 v_0 + 6\,\varepsilon_3\omega^2 v_0 + 6\,\omega^2 u_0 + 1 = 0.\end{cases} \quad (5.2.3)$$

Сол сияқты, (5.2.1) –дің екінші теңдеуіне (5.2.2)-ді қойып, ықшамдасақ:

$$\begin{cases}(-8d\omega^2 v_0 - 8\,\varepsilon_2\omega^2 u_0 - 8\varepsilon_4\omega^2 u_0 - bu_0 - v_0)\cos^2(\omega x) + \\ \quad +6\,d\omega^2 v_0 + 6\,\varepsilon_2\omega^2 u_0 + 6\,\varepsilon_4\omega^2 u_0 + a = 0.\end{cases} \quad (5.2.4)$$

(5.2.3) және (5.2.4) теңдеулер барлық $x \in R$ үшін орындалатындықтан, $cos^2(\omega x)$ коэффициенті кіретін мүшелер және тұрақтылар бірдей нөлге тең болуы керек. (4.2.3)-тен шығатыны:

$$\begin{cases}-\,8\,\varepsilon_1\omega^2 v_0 - 8\,\varepsilon_3\omega^2 v_0 - 8\,\omega^2 u_0 - cv_0 - u_0 = 0\,, & (5.2.5a)\\ 6\,\varepsilon_1\omega^2 v_0 + 6\,\varepsilon_3\omega^2 u_0 + 6\,\omega^2 u_0 + 1 = 0\,, & (5.2.5b)\end{cases}$$

(5.2.4) –тен тағы екі қатынас аламыз:

$$\begin{cases}-\,8d\omega^2 v_0 - 8\,\varepsilon_2\omega^2 u_0 - 8\varepsilon_4\omega^2 u_0 - bu_0 - v_0 = 0, & (5.2.6a)\\ 6d\,\omega^2 v_0 + 6\,\varepsilon_2\omega^2 u_0 + 6\,\varepsilon_4\omega^2 u_0 + a = 0. & (5.2.6b)\end{cases}$$

3·(5.2.5a)+4·(5.2.5b) сызықтық комбинациясы келесі өрнекті береді:

$$3u_0 + 3cv_0 = 4. \quad (5.2.7)$$

Сол сияқты, 3 · (5.2.6a) + 4 · (5.2.6b) сызықтық комбинациясы келесіні береді

$$3bu_0 + 3v_0 = 4a. \quad (5.2.8)$$

$(u_0\,, v_0\,)$ белгісіз айнымалылары үшін (5.2.7) және (5.2.8) сызықтық жүйені шешіп, біз «амплитуда» мәндерін аламыз:

$$u_0 = \frac{4}{3}\cdot\frac{ac-1}{bc-1}, v_0 = \frac{4}{3}\cdot\frac{b-a}{bc-1}$$

Кейбір алгебрадан кейін a, b, c және $\varepsilon_1 + \varepsilon_3$ арқылы өрнектелген ω^2 формуласын алуға болады (5.2.9)-ғы (u_0, v_0)-ді (5.2.5a)-ға қойсақ болғаны). Сонда:

$$\omega^2 = \frac{1}{8}\cdot\frac{bc-1}{1-ac-(b-a)(\varepsilon_1+\varepsilon_3)}.$$

Тұрақтылар (5.2.9) және (5.2.10)-нан болғанда (5.2.5b) теңдеуі автоматты түрде орындалатының ескеру маңызды. Алайда (5.2.6)-ғы екі теңдеу бұл параметрлер үшін міндетті түрде орындалмайды. Енді (5.2.9) and (5.2.10) –ғы u_0, v_0 және ω^2 мәндерін (5.2.6а)-ға апарып қоямыз. Алынған теңдікті әртүрлі формада жазуға болады; біз d-ны оқшаулау мүмкіндігін таңдадық:

$$d = a(\varepsilon_1 + \varepsilon_3) + (a - \varepsilon_2 - \varepsilon_4)\frac{ac-1}{b-a}. \qquad (5.2.11)$$

Тағы да ескеретініміз, (5.2.6b) теңдеуі автоматты түрде орындалады, егер (5.2.9), (5.2.10) және (5.2.11) мәндерін соған қойған кезде!

Ескерту 5.1. (5.2.11) қатынасты 8 өлшемді параметр кеңістігіндегі 7 өлшемді P гипербетінің теңдеуі ретінде қарастыруға болады. Біздің барлық параметрлеріміз осында қалуы керек. Қажетті нақты шешімдердің бар болуы үшін, әрине, көп жағдайлар бар және біз оларды қарастырамыз. Алдымен нәтижені тұжырымдаймыз:

Теорема 5.1. (Бірдей фазалы паттерндар). $u(x)$ және $v(x)$ функциялары (5.2.10) және (5.2.11) арқылы анықталатын ω^2 және d параметрлерімен бірге (5.1.1)-ң нақты стационарлық шешімдері болып табылады.

$$u(x) = \frac{4}{3}\cdot\frac{ac-1}{bc-1}\cdot\cos^2(\omega x), \qquad v(x) = \frac{4}{3}\cdot\frac{b-a}{bc-1}\cdot\cos^2(\omega x) \qquad (5.2.12)$$

Енді шешімдеріміздің физикалық мағынасы бар P-де бос емес аймақтардың бар екенін көрсетеміз. Іс жүзінде, $u(x) \geq 0, v(x) \geq 0, \omega^2 > 0$ және d > 0 шарттары орындалатындай (a, b, c, ε1, ε2, ε3, ε4) параметрлері үшін ең үлкені болады.Алдымен төрт жаңа параметрді енгіземіз:

$$X = \frac{b}{a}, Y = ac, \varepsilon_{1,3} = \varepsilon_1 + \varepsilon_3, \varepsilon_{2,4} = \varepsilon_2 + \varepsilon_4 \qquad (5.2.13)$$

Алдымен (X,Y) параметрлерін пайдаланып және $u(x) \geq 0, v(x) \geq 0$ шарттарын қолданып (5.2.9)-ғы формулаларды u_0, v_0 үшін қайта жазамыз:

$$u_0 = \frac{4}{3}\cdot\frac{ac-1}{bc-1} = \frac{4}{3}\cdot\frac{Y}{XY-1} > 0, v_0 = \frac{4}{3}\cdot\frac{b-a}{bc-1} = \frac{4}{3}\cdot a\cdot\frac{X-1}{XY-1} > 0 \qquad (5.2.14)$$

Осылардан біз ықшамдалған параметр кеңістігінде екі ерекше аймақ аламыз:

$$\left\{\begin{matrix} D_1{}^{(1)} = \left\{\left(a, X, Y, \ \varepsilon_{1,3}, \ \varepsilon_{2,4}\right)\middle| X > 1, Y > 1, a > 0\right\}, \\ D_2{}^{(1)} = \{(a, X, Y, \ \varepsilon_{1,3}, \ \varepsilon_{2,4})\ |0 < X < 1, 0 < Y < 1, a > 0\} \end{matrix}\right\} \qquad (5.2.15)$$

Енді, (5.2.13) бойынша, $\omega^2 > 0$ келесіге эквивалент

$$\omega^2 = \frac{1}{8}\cdot\frac{XY-1}{1 - Y - a\cdot\varepsilon_{1,3}.(X-1)} > 0.$$

$D_1^{(1)}$-де XY − 1 > 0 болғандықтан және $D_1^{(1)}$–де XY − 1 < 0 болғандықтан бұл шарт келесі $D_1^{(1)}$ және $D_2^{(1)}$ аймақтарын екі бөлікке шектейді:

$$\begin{cases} D_1{}^{(2)} = \{(a, X, Y, \varepsilon_{1,3}, \varepsilon_{2,4}) \in D_1{}^{(1)} | Y - 1 < -a \cdot \varepsilon_{1,3}(X - 1)\} \subset D_1{}^{(1)} \\ D_2{}^{(2)} = \{(a, X, Y, \varepsilon_{1,3}, \varepsilon_{2,4}) \in D_2{}^{(1)} | Y - 1 > -a \cdot \varepsilon_{1,3}(X - 1)\} \subset D_2{}^{(1)} \end{cases} \quad (5.2.16)$$

(5.2.16)-дан $\varepsilon_{1,3} < 0$ теңсіздігі барлық жағдайда орындалады деген қорытындыға келеміз. (5.2.16) –дан (X, Y) жазықтығында $D_1^{(2)}$ және $D_2^{(2)}$ секторлары үшін өткір шекара сызығы бар екені анық. Ол келесі теңдеумен берілген:

$$Y - 1 = -a\varepsilon_{1,3}(X - 1). \quad \text{(Түзу1)}$$

Бұл Түзу1 $(X, Y) = (1,1)$ нүктесі арқылы оң көлбеулеп өтеді.

$$m_1 = -a \cdot \varepsilon_{1,3} > 0. \quad (5.2.17)$$

(5.2.13) түрлендіруі (5.2.11)-гі d > 0 параметрі үшін төмендегіні береді:

$$d = a \cdot \varepsilon_{1,3} + (a - \varepsilon_{2,4}) \cdot \frac{Y - 1}{a \cdot (X - 1)} > 0.$$

Егер бұл теңсіздікті $D_1^{(1)}$ және $D_2^{(1)}$ аймақтарында бөлек шешсек, екі жаңа сектор аламыз:

$$\begin{cases} D_1{}^{(3)} = \{(a, X, Y, \varepsilon_{1,3}, \varepsilon_{2,4}) \in D_1{}^{(1)} | (a - \varepsilon_{2,4})(Y - 1) > -a^2\varepsilon_{1,3}(X - 1)\}, \\ D_2{}^{(3)} = \{(a, X, Y, \varepsilon_{1,3}, \varepsilon_{2,4}) \in D_2{}^{(1)} | (a - \varepsilon_{2,4})(Y - 1) < -a^2\varepsilon_{1,3}(X - 1)\}. \end{cases}$$

(5.2.18)

$\varepsilon_{1,3} < 0$ барлық жағдайда ақиқат болғандықтан, $a - \varepsilon_{2,4} > 0$ шарты да орынды: бұл (5.2.18) теңсіздіктерден шығады. (X, Y) параметр жазықтығында $(X, Y) = (1, 1)$ нүктесі арқылы көлбеулеп өтетін басқа шекара сызығы бар.

$$(Y - 1) = -\frac{a^2 \cdot \varepsilon_{1,3}}{a - \varepsilon_{2,4}} \cdot (X - 1) \quad \text{(Түзу2)}$$

мұндағы көлбеу:

$$m_2 = -\frac{a^2 \cdot \varepsilon_{1,3}}{a - \varepsilon_{2,4}} > 0. \quad (5.2.19)$$

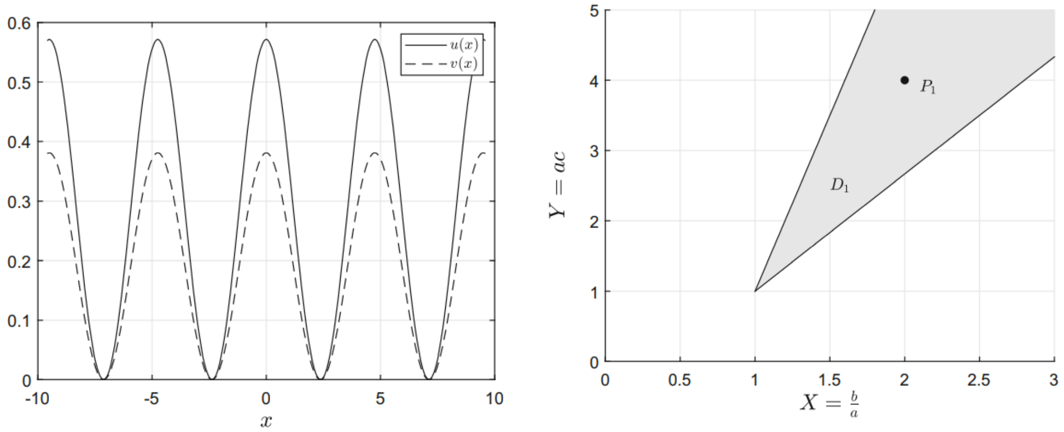
$u(x) \geq 0, v(x) \geq 0, \omega^2 > 0$ және d > 0 шарттарының барлығы бір уақытта орындалуы керек болғандықтан, төмендегі қиылысулар

$$D_1 = D_1^{(2)} \cap D_1^{(3)}, D_2 = D_2^{(2)} \cap D_2^{(3)}$$

параметрлердің мүмкін болатын соңғы облыстарын береді, мұнда (5.2.12) теріс емес және периодты шешімдері табылады. D_1 және D_2 аймақтары бос болмайды, егер *Түзу*$_1$ және *Түзу*$_2$ көлбеулері $m_2 < m_1$ шартын қанағаттандырса, яғни:

$$m_1 - m_2 = -a^2 \cdot \varepsilon_{1,3} - \left(\frac{-a^2 \cdot \varepsilon_{1,3}}{a - \varepsilon_{2,4}}\right) = a \cdot \frac{\varepsilon_{1,3} \cdot \varepsilon_{2,4}}{a - \varepsilon_{2,4}} > 0$$

Бұл теңсіздіктен $\varepsilon_{2,4} < 0$ болу керектігі шығады, өйткені $a > 0, a - \varepsilon_{2,4} > 0$ және $\varepsilon_{1,3} < 0$.



1 сурет. Келесі параметрлермен берілген бірдей фазалардағы (u, v) периодты шешімі $a = 2, b = 4, c = 2, d = 4, \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1, \quad \varepsilon_3 = -3.5, \varepsilon_4 = -5, u_0 = \frac{4}{7}, v_0 = \frac{8}{21}, \omega = 0.6614$ (сол жақта) және D_1 облысындағы P_1 нүктесі (оң жақта).

$a > 0, b > 0, c > 0, \varepsilon_1 + \varepsilon_3 < 0, \varepsilon_2 + \varepsilon_4 < 0$ болжамдарымен бірге бастапқы $(a, b, c, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$ параметр мәндерін қолданатын аймақтар үшін шарттарды қорытындылаймыз.

$$D_1 = \begin{cases} a < b, a \cdot c > 1, \\ a \cdot (a \cdot c - 1) > -a \cdot (\varepsilon_1 + \varepsilon_3) \cdot (b - a) < (a - \varepsilon_2 - \varepsilon_4) \cdot (a \cdot c - 1), \end{cases}$$

$$D_2 = \begin{cases} b < a, a \cdot c < 1, \\ a \cdot (a \cdot c - 1) > -a \cdot (\varepsilon_1 + \varepsilon_3) \cdot (b - a) > (a - \varepsilon_2 - \varepsilon_4) \cdot (a \cdot c - 1). \end{cases}$$

Ескерту 5.2. (a) $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = 0$ болғандағы кросс-диффузия мүшелері жоқ жүйені қарастырайық. $\varepsilon_1 + \varepsilon_3 < 0$ және $\varepsilon_2 + \varepsilon_4 < 0$ шарттары орындалмағандықтан, бұл жағдай D_1 аймағына да, D_2 аймағына да жатпайды. Демек, бұл жағдайда (5.2.2) типті периодты шешім жоқ.

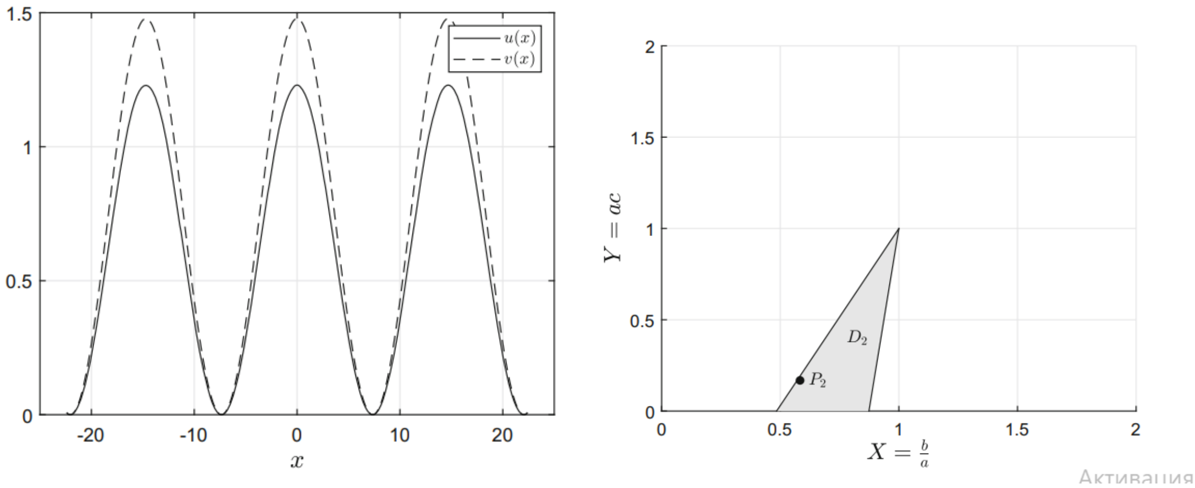
(b) $\varepsilon_1 = 1, \varepsilon_2 = d, \ \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = 0$ жағдайын қарастырайық ("ісіктердің өсу жүйесі"). $\varepsilon_1 + \varepsilon_3 = 1 < 0$ және $\varepsilon_2 + \varepsilon_4 = d < 0$ шарттары орындалмағандықтан, параметрлер D_1 аймағына да, D_2 аймағына да тиесілі емес. Сонымен, бұл жағдайда (5.2.2) типті периодтық шешім жоқ.

Көрнекілік үшін біз параметр мәндерін $a = 2, b = 4, c = 2, d = 4, \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1,\ \varepsilon_3 = -3.5, \varepsilon_4 = -5$ түрінде таңдаймыз, сонда D_1 аймағында белгіленген барлық талаптар орындалады. Периодтық паттерндар 1-суреттің сол жағында $u(x)$ үшін үздіксіз сызықпен және $v(x)$ үшін нүктелі сызықпен сызылған.

Координаталар жүйесін пайдаланып 1-суреттің оң жағына D_1 аймағындағы P_1 нүктесін саламыз $\left(X = \frac{b}{a},\ Y = \mathrm{a} \cdot \mathrm{c}\right)$. 2-суретте $a = 2.4, b = 1.4, c = 0.07, d = 0.2336, \varepsilon_1 = 0.2, \varepsilon_2 = 0.1,\quad \varepsilon_3 = -3.5, \varepsilon_4 = -7.5$ параметр мәндеріне сәйкес келетін D_2 аймағындағы P_2 нүктесі мен паттерндар көрсетілген.

Жоғарыда айтылғандай, бұл екі бәсекелес түрдің мұндай таралуының болуы тән емес, бірақ көріп отырғанымыздай, мүмкін: бұл «үйлесімді бірге өмір сүрудің» бір түрі. Мұндай жағдайды жасау үшін бақылау параметрлерін өте нәзік түрде таңдау керек.

Ескерту 5.3. Әдетте (әрдайым дерлік) диффузия заңдары феноменологиялық болып табылады (Фик, Дарси, Ньютон және т.б.заңдары). Дегенмен, физика-математиканың қарапайым ойлары арқылы, жаңа тәжірибелер арқылы жаңа формаларды ұсынуға болады (1953 жылғы Моришитаның әртүрлі құмдардағы ықтималдық теориясындағы құмырсқа арыстандарымен жасалған оригиналды тәжірибесі сияқты, ([79]) қараңыз). Шешімдеріміз төмендегідей болып табылады:



2 сурет. Келесі параметрлермен берілген бірдей фазалардағы (u, v) периодты шешімі $a = 2.4, b = 1.4, c = 0.07, d = 0.2336, \varepsilon_1 = 0.2, \varepsilon_2 = 0.1, \varepsilon_3 = -3.5, \varepsilon_4 = -7.5, u_0 = 1.2298,\ v_0 = 1.4782, \omega = 0.2374$ (сол жақта) және D_2 облысындағы P_2 нүктесі (оң жақта).

Практикада және сандық есептеулерде аймақтар шенелген. Алайда, егер Нейман шарттарын ескерсек, шешімді бұл жағдайда да қолдануға болады. Жоғарыда айтылғандай, олар процестің соңғы күйін бір өркешті, екі өркешті және т.б. болатындай сипаттайды. Көбінесе, егер аймақ кішкентай болса, онда соңғы күй периодты шешімнің бөлігі екенің көру тіпті қиын. Келесі 3-суреттен көріп отырғанымыздай, бірге тұру қандай да бір мағынада өте тұрақты болуы мүмкін. [74]-гі «паттерн» анықтамасында тұрақты емес шешімнен басқа, стационарлық шешімнің Ляпунов тұрақтылығы туралы сұрақ қойылады.

Дегенмен, бұл бүкіл түзудегі Коши есебіне арналған.

Кеңістіктегі аймақ шенелген болса, (5.1.1) модельді шекаралық шарттармен, көбінесе біртекті Нейман шартымен толықтыру керек.

Бастапқы шартқа өте жақын жаңа бастапқы шартты аламыз, бірақ шекарадағы нормаль туындысы өзгеше, нөлге тең емес. Көп жағдайда осы деректермен берілген шешім бастапқы шешімге жақын болмайды.

Алайда, берілген паттерн тіпті үлкен ауытқуларға қатысты өте тұрақты болуы мүмкін егер оның құрылымы ауытқудан «алыс емес» болса.

Мұнда $(1+\varepsilon\cos(\omega_1 x))u(x)$ сияқты мультипликативті ауытқуларды қолдандық, сондықтан мұндағы 3-ші және 4-ші суреттер үшін $\varepsilon = 0.2$ және $\omega_1 = 25\omega$ міндетті түрде аз емес.

Паттерніміз шынымен де тұрақты және «ақырлы уақытта» дерлік жинақталуы өте жылдам екенін көруге болады.

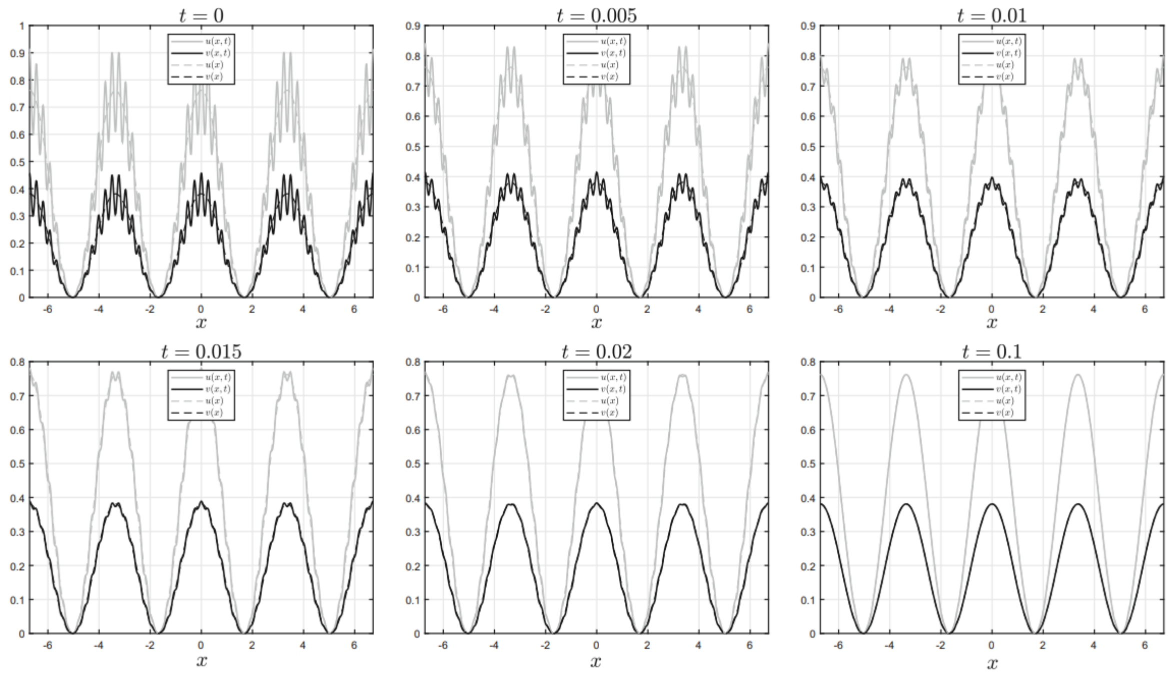
5.3 Екі фазалы периодты паттерндар

(5.1.1)-теңдеудің стационарлық тұрақты емес $\big(u(x), v(x)\big)$ шешімнің басқа да тобын табу үшін келесі түрде шешімдерді іздейміз:

$$\big(u(x), v(x)\big) = \big(u_0 cos^2(\omega x), v_0 sin^2(\omega x)\big), \tag{5.3.1}$$

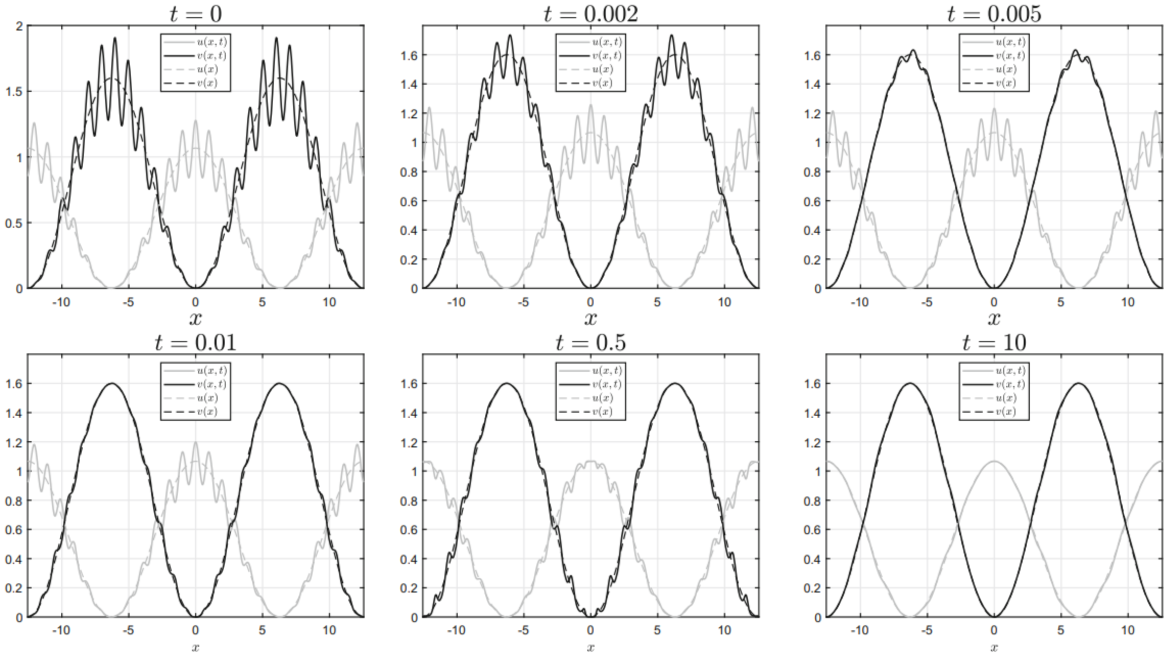
мұндағы $u_0 > 0, v_0 > 0$ оң тұрақтылар және $\omega \in R$. Бір-біріне қарама-қарсы фазаларда орналасқандықтан, бұл типті периодты шешімдер деп атаймыз, өйткені $u(x)$-ң максималды мәндері $v(x)$-ң минимум мәндері болатын жерде орналасқан және керісінше.

Бастапқы нәтижелер бір фазалы жағдайдағыдай басқа жолмен алынғанын атап өтеміз. Келесі қорытынды әлдеқайда қарапайым және әлдеқайда анық.



3 сурет. $\big(u(x,t), v(x,t)\big)$ сандық шешімдері $t =$

$0, 0.005, 0.01, 0.015, 0.02, 0.1$ уақыт өзгеруіне байланысты стационарлық периодтық паттернға бейім, мұндағы параметрлер: $a = 2, b = 3, c = 1.5, \mathrm{d} = 1, \varepsilon_1 = 1, \varepsilon_2 = 1, \varepsilon_3 = -3.5, \varepsilon_4 = -2, u_0 = 0.7619, v_0 = 0.3809, \omega = 0.9354$.



4 сурет. $\big(u(x,t), v(x,t)\big)$ сандық шешімдері $\mathrm{t} = 0, 0.002, 0.005, 0.01, 0.5, 10$ уақыт өзгеруіне байланысты стационарлық периодтық паттернға бейім, мұндағы параметрлер: $a = 2, b = 3, c = 0.5, \mathrm{d} = 6, \varepsilon_1 = 1, \varepsilon_2 = 6, \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = 0, u_0 = 1.0667, v_0 = 1.6, \omega = 0.25$.

(5.2.1)-ң бірінші теңдеуіне (5.3.1)-ді апарып қоямыз. Туындыларды есептеп және тригонометриялық теңдіктерді пайдалана отырып, тек $cos^2(\omega x)$ дәрежелері болатын теңдеу аламыз. Бұл теңдеуді u_0 –ға бөліп және ұқсас мүшелерді біріктіріп, келесі өрнекті аламыз:

$$\begin{cases}(-8\varepsilon_1\omega^2 v_0 - 8\varepsilon_3\omega^2 v_0 + 8\omega^2 u_0 - cv_0 + u_0)cos^4(\omega x) + \\ (6\,\varepsilon_1\omega^2 v_0 + 10\varepsilon_3\omega^2 v_0 - 6\omega^2 u_0 + cv_0 - 1)cos^2(\omega x) - 2\,\varepsilon_3\omega^2 v_0 = 0.\end{cases} \tag{5.3.2}$$

Сол сияқты, (5.2.1) екінші теңдеуіне (5.3.1)-ді апарып қойып және v_0 -ге бөлсек:

$$\begin{cases}(8d\omega^2 v_0 - 8\varepsilon_2\omega^2 u_0 - 8\varepsilon_4\omega^2 u_0 - bu_0 + v_0)cos^4(\omega x) + \\ +(-10\,d\omega^2 v_0 + 10\varepsilon_2\omega^2 u_0 + 6\varepsilon_4\omega^2 u_0 + bu_0 + a - 2v_0)cos^2(\omega x) + \\ +2d\omega^2 v_0 - 2\,\varepsilon_2\omega^2 u_0 - a + v_0 = 0.\end{cases} \tag{5.3.3}$$

(5.3.2) және (5.3.3) теңдеулер барлық $x\epsilon R$ үшін орындалатындықтан, $cos^2(\omega x)$ дәрежесі бойынша барлық коэффициенттер және тұрақты нөлге тең болуы керек. (5.3.2) теңдігі үш теңдеу береді:

$$\begin{cases} -8\,\varepsilon_1\omega^2 v_0 - 8\,\varepsilon_3\omega^2 v_0 + 8\,\omega^2 u_0 - cv_0 + u_0 = 0, & (5.3.4\,a) \\ 6\,\varepsilon_1\omega^2 v_0 + 10\,\varepsilon_3\omega^2 v_0 - 6\,\omega^2 u_0 + cv_0 - 1 = 0, & (5.3.4\,b) \\ 2\,\varepsilon_3\omega^2 v_0 = 0, & (5.3.4\,c) \end{cases}$$

ал (5.3.3) теңдігі тағы үшеуін береді:

$$\begin{cases} 8\,d\omega^2 v_0 - 8\,\varepsilon_2\omega^2 u_0 - 8\,\varepsilon_4\omega^2 u_0 - bu_0 + v_0 = 0, & (5.3.5a) \\ -10\,d\omega^2 v_0 + 10\,\varepsilon_2\omega^2 u_0 + 6\,\varepsilon_4\omega^2 u_0 + bu_0 + a - 2\,v_0 = 0, & (5.3.5b) \\ 2\,d\omega^2 v_0 - 2\,\varepsilon_2\omega^2 u_0 - a + v_0 = 0. & (5.3.5c) \end{cases}$$

(5.3.4c)-дан $\varepsilon_3 = 0$ бірден шығады, яғни ε_3 жүйеде жоқ, өйткені $\omega^2 > 0$ және $v_0 > 0$ периодтық паттернға ие болу үшін қажет. $\varepsilon_3 = 0$ –ді (5.3.4a)-ға және (5.3.4b)-ға қоямыз, 3·(5.3.4a) + 4·(5.3.4b) комбинациясын есептеңіз. u_0 және v_0 арасындағы келесі қарапайым байланысты аламыз:

$$3\,u_0 + cv_0 = 4. \qquad (5.3.6)$$

5 · (4.3.5a) + 4 · (4.3.5b) комбинациясы келесі өрнекті береді:

$$-16\,\varepsilon_4\omega^2 u_0 - bu_0 + 4\,a - 3\,v_0 = 0. \qquad (5.3.7)$$

(5.3.5b) + 5 · (5.3.5c) басқа комбинациясы басқа өрнекті береді:

$$6\,\varepsilon_4\omega^2 u_0 + bu_0 - 4\,a + 3\,v_0 = 0. \qquad (5.3.8)$$

(5.3.7) және (5.3.8) мәндерін қосып төмендегідей нәтиже аламыз:

$$-10\,\varepsilon_4\omega^2 u_0 = 0.$$

$\varepsilon_4 = 0$ болуы керек, яғни $\omega^2 > 0$ және $u_0 > 0$ болғандықтан жүйеде ε_4 жоқ. $\varepsilon_4 = 0$ мәнің (5.3.8)-ге қойып u_0 және v_0 арасындағы сызықтық қатынасты аламыз:

$$b\,u_0 + 3\,v_0 = 4\,a \qquad (5.3.9)$$

(u_0, v_0) -ді белгісіздер ретінде ескере отырып (5.3.6), (5.3.9) жүйесін шешіп, амплитудаларды табамыз:

$$u_0 = 4 \cdot \frac{a \cdot c - 3}{b \cdot c - 9}, \quad v_0 = 4 \cdot \frac{b - 3\,a}{b \cdot c - 9}. \qquad (5.3.10)$$

(4.3.10) -ғы (u_0, v_0)–ді (5.3.4a)-ға апарып қойып және $\varepsilon_3 = \mathbf{0}$ мәнін еске түсіріп, ω^2 табамыз:

$$\omega^2 = \frac{1}{8} \cdot \frac{bc - 9 - 4 \cdot (ac-3)}{ac - 3 - (b-3a)\varepsilon_1}. \qquad (5.3.11)$$

(5.3.10)-ғы және (5.3.11)-гі мәндерді (5.3.4b) теңдеуіне апарып қойғанда, онда ол теңдеу автоматты түрде орындалатынын баса атап өтеміз.Алайда (5.3.5)-гі екі теңдеу бұл параметрлерімен қанағаттандырмайды және осының салдарынан алдыңғы тараудағыдай, мысалы, d диффузия параметрінің мәнін белгілеуіміз керек. Сол үшін (5.3.10)-ғы және (5.3.11)-гі u_0, v_0 және ω^2 мәндерін (5.3.5a) теңдеуіне апарып қоямыз. Енді d параметрін келесі түрде өрнектеуге болады:

$$d = \frac{abc + 3\,a - 4\,b}{4\,ac - bc - 3} \cdot \varepsilon_1 - \frac{ac-3}{3\,a - b} \cdot \varepsilon_2 + \frac{(ac-3)(abc + 3\,a - 4\,b)}{(3\,a-b)(4\,ac - bc - 3)} \qquad (5.3.12)$$

(5.3.5b) және (5.3.5c) теңдеулеріне (5.3.10), (5.3.11) және (5.3.12) тұрақтыларын апарып қойғанда бұл теңдеу орындалатындығын тағы да атап өтеміз.

Теорема 5.2. (Қарама-қарсы фазалары бар паттерндар) Келесі функциялар

$$u(x) = 4 \cdot \frac{a\,c - 3}{b\,c - 9} \cdot cos^2(\omega x), \ v(x) = 4 \cdot \frac{b - 3\,a}{b\,c - 9} \cdot sin^2(\omega x) \qquad (5.3.13)$$

(5.3.11) және (5.3.12) формулаларымен берілген ω^2 және d параметрлері бар (5.1.1)-ң дәл шешімдері.

$u(x) \geq 0, v(x) \geq 0, \omega^2 > 0$ және $d > 0$ шарттарының барлығы $\varepsilon_3 = \varepsilon_4 = 0$ шарттарымен бірге орындалатындай $(a, b, c, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$ параметрлердің бірнеше нақты аймақтары бар. Бұл аймақтарды 2-бөлімдегідей ұқсас жолмен табуға болады. Мысал ретінде біз «ісік өсуі» деп аталатын жүйеге жақын модельді қарастырамыз, ([72, 77] қараңыз). Периодтық паттерннің бар болуының барлық шарттары келесі параметрлер үшін орындалатынын көруге болады:

$a = 2, b = 3, c = 0.5, \mathrm{d} = 6, \varepsilon_1 = 1, \varepsilon_2 = 6, \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = 0.$

Келесі 4-суретте $\big(u(x), v(x)\big)$ периодтық паттерндардың бастапқы деректері әртүрлі шешімдерді қалай тартатынын көрсетеді. Мұнда t=0 уақытындағы арнайы (міндетті түрде аз емес) периодтық бастапқы ауытқуларды қолданамыз және сол $[-L, L]$ аралықта біртекті Нейман-шекаралық шарттарымен сандық түрде есептейміз. Мұндағы $x = \pm L > 0$ $\big(u(x), v(x)\big)$ максималды немесе минималды мәндеріне қол жеткізетін нүктелер.

ҚОРЫТЫНДЫ

Бұл диссертациялық жұмыста келесі негізгі нәтижелер алынды:

- фазалық релаксация бар математикалық моделінің шешімінің бар болуы, жалғыздығы алынды және релаксация уақыты бойынша шекке көшу леммасы дәлелденді. Шектік жағдайда бастапқы есеп Стефан типіндегі есеп екендігі дәлелденді;
- квазисызықты псевдопараболалық теңдеу үшін қойылған бастапқы-шеттік есебінің әлсіз шешімінің бар екендігі дәлелденді. Априорлық бағалаулар негізінде жалпыланған әлсіз шешімінің бар болуы және жалғыздығы туралы локалді теоремасы дәлелденді. Шешімдердің ақырлы уақытта қирауы үшін жеткілікті шарттар алынды;
- қайта анықтау арқылы берілген интегралдық шарты бар параболалық типті теңдеуге қойылған кері есептің әлсіз шешімінің бар болуы Галеркин әдісімен дәлелденген. Дәрежелік типіне қатысты сызықты емес қарама-қарсы таңбалы кері есептің шешімінің тұрақтылығы алынды;
- сызықты емес кросс-диффузиясы бар бәсекелестік жүйесінде параметр кеңістігін бөліктерге бөле алдық және шешімдеріміз бар Тьюринг аймақтарын көрсетттік.

Алғашқы кері есептер геофизика және пайдалы қазбаларды барлау есептеріне байланысты шығарылды. Қазіргі уақытта геофизикада қолданылатын модельдердің күрделене түсуіне байланысты тура және кері есептерді шешу әдістемесі де жетілдірілуде.

Алынған нәтижелер жарықшасы бар ортадағы фильтрацияның модельді теңдеуіндегі жарықтар мен кеуектер арасындағы сұйықтық алмасудың қарқындылығын анықтау есебін шешуге мүмкіндік береді.

Диссертациялық жұмыстың қол жеткізген нәтижелері арқылы есептеу эксперименттерін жүргізуге және шешімдердің сандық мәндерін алуға болады. Диссертациялық жұмыста қарастырылған есептерді шешудің жаңа әдістері мен тәсілдерін болашақта экологияның, фильтрация теориясының, гидродинамиканың, химияның және басқа да көптеген салалардағы әртүрлі есептерді зерттеу кезінде қолдануға болады.

ПАЙДАЛАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ

1.Kaliev I.A., Mukhambetzhanov S.T., Sabitova G.S. Numerical modeling of the non-equilibrium sorption process // Ufa Mathematical Journal. – 2016. – Vol. 8 (2). P. 39-43.

2.Калиев И.А., Разинков Е.Н. О задаче Стефана с фазовой релаксацией //Сб. науч. трудов ДСС, Вып. 91, 1989, с. 21-36

3.Lapidus L., Amundson W.R. Mathematics of adsorption in beds. VI. The effect of longitudinal diffusion in ion exchange and chromatographic columns // J.Phys. Chem. 1952. V.56. P. 984-988.

4.Coats K.H., Smith B.D. Dead and pore volume and dispersion in porous media // Soc. Petrol. Eng. J. 1964. V. 4, N.1, p. 73-84

5.Kaliev I.A., Sabitova G.S. On a problem of nonequilibrium sorption // Journal of Applied and Industrial Mathematics. 2003. Vol. VI, №1 (13). P. 35-39

6.Калиев И.А., Мухамбетжанов С.Т., Разинков Е.Н. Корректность математической модели неравновесных фазовых переходов воды в пористых средах// Сб. Динамика сплошной среды. ИгиЛ СО РАН. Новосибирск. В. №93,94,1989г., стр.46-59.

7.Ahmed-Zaki D.Zh., Mukhambetzhanov S.T., Imankulov T.S. Design of i-fields system component: Computer model of oil-recovery by polymer flooding // Informatics in Control, Automation and Robotics (ICINCO), 12th International Conference. – 2015. - Vol. 2. – P. 510-516.

8. Meirmanov A.M., Mukhambetzhanov S.T., Nurtas, M. Seismic in composite media: Elastic and poroelastic components// Siberian Electronic Mathematical Reports. – 2016.

9.Kenzhebayev T.S., Mukhambetzhanov S.T. Numerical Solution Of The Inverse Problem Of Filtration Theory By Modulating Functions// Far East Journal of Mathematical Sciences. – 2016. – Vol. 99 (12). – P. 1779

10. Мейрманов А.М. Задача Стефана. –Новосибирск.: Наука, 1986. - 239с.

11. Соболев С.Л. Об одной новой задаче математической физики // Изв. Акад.наук СССР. Серия мат., 18 (1954), № 1, 3–50 стр.

12. S.L. Sobolev, Applications of Functional Analysis in Mathematical Physics, M.:Nauka, 1988. (in Russian)

13. Баренблатт Г.И., Желтов Ю.П., Конина И.Н. Об основных представлениях теории фильтрации в трещинноватых средах // Прикл. матем. и механ. 1960. Т. 24. № 5, с. 58-73.

14. T. W. Ting, Parabolic and pseudoparabolic partial differential equations, J. Math. Soc. Japan. 14 (1969), p. 1-26. 1

15. T.B. Benjamin, Lectures on nonlinear wave motion, Ltd. Appl. Math. Vol. Amer. Math. Soc: Provi-dence; RL, 15 (1974), p.3 -7.

16. T.B. Benjamin, J.L. Bona, J.J. Mahony, Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems, Pliilos. Trans. Roy. Soc. London A, 272 (1972), no. 1220, p. 47 - 78.

17. J.P. Albert, J.L. Bona, J.-C. Saut, Model equations for waves in stratified fluids, Proc. Roy. Soc. London A, 453 (1997), no. 1961, p. 1233-1260. 1

18. R. E. Showalter, Existence and representation theorems for a semilinear Sobolev equation in Banach space, SIAM J. Math. Anal., 3(1972), no. 3, p. 527-543.

19. R.E. Showalter The Sobolev type equations I, Appl. Anal. 5 (1975), no. 1, p. 15-22.

20. R.E. Showalter The Sobolev type equations, Appl. Anal. 5 (1975), no. 2, p. 81-99.

21. R.E. Showalter, T. W. Ting, Pseudoparabolic partial differential equations, SIAM J. Math. Anal. 1 (1970), no. 1, p. 1–26.

22. U. Stefanelli, On a class of doubly nonlinear nonlocal evolution equations, Differ. Integr. Equations, 15 (2002), no. 8, p. 897–922.

23. G. A. Sviridyuk, Variety of solutions of one singular parabolic equation, Sov. Math. Dokl. 289 (1986), no. 6, p. 1315–1318.

24. S. I. Pohozhaev, On an approach to nonlinear equations, Sov. Math. Dokl., 20 (1979), 912–916.

25. A. P. Oskolkov, Initial-boundary value problems for equations of motion of Kelvin–Voight fluids and Oldroyd fluids, Proc. Steklov Inst. Math., 179 (1989), p. 137–182.

26. A. P. Oskolkov, To the stability theory for the solutions of the semilinear dissipative Sobolev type equa- tions, J. Math. Sci., 77 (1995), no.3, p. 3225–3231.

27. A. P. Oskolkov, Nonlocal problems for some class nonlinear operator equations arising in the theory Sobolev type equations, J. Soviet Math., 64 (1993), no. 1, p. 724–736.

28. S.L. Gabov, A.G. Sveshnikov, Linear problems of the theory of non-stationary internal waves, M.: Nauka, 1990. (in Russian)

29. M. O. Korpusov, A. G. Sveshnikov, Three-dimensional nonlinear evolution equations of pseudoparabolic type in problems of mathematical physics, Comput. Math. Math. Phys., 43:12 (2003), p. 1765–1797.

30. M. O. Korpusov, A. G. Sveshnikov, Three-dimensional nonlinear evolutionary pseudoparabolic equations in mathematical physics II, Comput. Math. Math. Phys., 44:11 (2004), p. 1942–1948. 1, 1.1

31. M. O. Korpusov, A. G. Sveshnikov, On blow up of a solution to a Sobolev-type equation with a nonlocal source, Siberian Math. J. 46 (2005), no. 3. p.443–452.

32. M. O. Korpusov, A. G. Sveshnikov, Finite-time relaxation of the solution of a nonlinear pseudoparabolic equation, Comput. Math. Math. Phys. 51 (2011), no.3, p.377–403.

33. I. A. Shishmarev, On a nonlinear Sobolev type equation, Differential Equations, 41 (2005), p. 146–149.

34. M. O. Korpusov, A. G. Sveshnikov, On the solvability of strongly nonlinear pseudoparabolic equation with double nonlinearity, Comput. Math. Math. Phys., 43:7 (2003), p. 944–961.

35. A. B. Alshin, M. O. Korpusov, A. G. Sveshnikov, Blow-up in nonlinear Sobolev type equations, Series in nonlinear analisys and applications, 15, De

Gruyter, 2011, 648 p.
36. P.A. Makarov, Blow-Up of the Solution of the Initial Boundary-Value Problem for the Generalized Boussinesq Equation with Nonlinear Boundary Condition, Math. Notes, 92:4 (2012), p. 519–531.
37. A.S. Berdyshev, S.E. Aitzhanov, G.O. Zhumagul, Solvability of Pseudoparabolic Equations with Non- Linear Boundary Condition, Lobachevskii J. Math., 41:9 (2020), p. 1772—1783.
38. A.A. Samarskii, V.A. Galaktionov, S.P. Kurdyumov, A.P. Mikhailov, Blow-Up in Quasilinear Parabolic Equations, Berlin: Degruyter, 1995, 560 p.
39. O.A. Ladyzhenskaia, V.A. Solonnikov, N.N. Uraltseva, Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type Translations of Mathematical Monographs, 23. Providence, RI: American Mathematical Society, 1968.
40. S. N. Antontsev, J. I. Diaz, and S. Shmarev, Energy Methods for Free Boundary Problems: Applications to Nonlinear PDEs and Fluid Mechanics, Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications 48, Birkhäuser, 2002.
41. J.-L. Lions, Some methods for solving non-linear boundary value problems, M.: Nauka, 1972, 588 p. (in Russian)
42. S.N. Antontsev, E. Ozturk, Well-posedness and long time behavior for p-Laplacian equation with non- linear boundary conditions, J. Math.Anal.Appl., 472 (2019), p. 1604-1630.
43. S. N. Antontsev and K. Khompysh, Kelvin-Voight equation with p-Laplacian and damping term: Exis- tence, uniqueness and blow-up, J. Math. Anal. Appl., 446 (2017), no. 2, 1255–1273.
44. S. N. Antontsev and K. Khompysh, Generalized Kelvin-Voigt equations with p-Laplacian and source/absorption terms, J. Math. Anal. Appl., 456 (2017), no. 1, 99–116.
45. S.N. Antontsev, H.B. de Oliveira, Kh. Khompysh, Existence and large time behavior for generalized Kelvin-Voigt equations governing nonhomogeneous and incompressible fluids. 2019 J. Phys.: Conf. Ser. 1268 012008.
46. S.N. Antontsev, H.B. de Oliveira, Kh. Khompysh, Kelvin -Voigt equationa with anisotropic diffusion, relaxation and damping: Blow-up and large time behavior, Asymptotic Analysis, 121 (2021), no. 2, p. 125-157.
47. S.N. Antontsev, H.B. de Oliveira, Kh. Khompysh, Generalized Kelvin-Voigt equations for nonhomoge- neous and incompressible fluids, Communications in Mathematical Sciences, 17 (2019), no. 7, p.1915- 1948.
48. S.N. Antontsev, H.B. de Oliveira, Kh. Khompysh, Kelvin-Voigt equations perturbed by anisotropic re- laxation, diffusion and damping, J. Math.Anal.Appl. 473 (2019), p. 1122-1154.
49. B.P. Demidovich, Lectures on the mathematical theory of stability, M: Nauka, 1967. (in Russian)
50. J.-L. Lions, Inhomogeneous boundary value problems and their applications, M: Mir, 1971. 372 p. (in Russian) 4
51. Zh- L.Lions, Quelques mrethodes de rresolution des probl‘emes aux limites non linreaires, Paris: Dunod de Gruyter, 1969. Zbl 0189.40603
52. P.A. Raviart, Sur la rresolution de certaines requations

paraboliques non linreaires, Functional Analysis, **5**:2 (1970), 299–328. MR0257585

53. A.V. Ivanov, Quasilinear parabolic equations admitting a double degeneracy, Algebra and analysis, 4:6 (1992),114–130, (in Russian); English translation: A.V. Ivanov, Quasilinear parabolic equations admitting double degeneracy, St. Petersburg Math. J. 4:6 (1993), 1153– 1168. MR1199637

54. G.I. Laptev, Weak solutions of second-order quasilinear parabolic equations with double non- linearity, Algebra and analysis, 188:9 (1997), 83–112 (in Russian); English translation: G.I. Laptev, Weak solutions of second-order quasilinear parabolic equations with double non- linearity, Sb. Math., 188:9 (1997),1343–1370. MR1481665

55. A. Bamberger, Etude d'une equation doublement non lineaire, J. Funct. Anal., 24:2 (1997),148–155.

56. F. Kh. Mukminov, E. R. Andriyanova, Stabilization of the solution of a doubly nonlinear parabolic equation, Sb. math., 204:9 (2013), 1239–1263. MR3137132

57. M.O. Korpusov, Destruction of solutions of the heat equation with a double nonlinearity, TMF., 172:3 (2012), 339–343 (in Russian); English translation: M.O.Korpusov, Destruction of solutions of the heat equation with a double nonlinearity, Theoret. and Math. Phys., 172:3 (2012), 1173–1176. MR3168740

58. M.O. Korpusov, Solution blow-up for a class of parabolic equations with double nonlinearity, Math.sb., 204:3 (2013), 19–42 (in Russian); English translation: M.O.Korpusov, Solution blow-up for a class of parabolic equations with double nonlinearity, Sb. Math., 204:3 (2013), 323–346. MR3088098

59. H.A. Levine, S.R. Park, J. Serrin, Global existence and nonexistence theorems for quasilinear evolution equations of formally parabolic type, J. Differential Equations, 142:1 (1998), 212– 229. MR1492883

60. A.Samarskii, V. Galaktionov, S. Kurdyumov, and A. Mikhailov, Blow-up in quasilinear parabolic equations, Berlin: De Gruyter, 1995. MR1330922

61. A.B. Al'shin, M.O. Korpusov, A.G. Sveshnikov, Blow-up in nonlinear Sobolev type equations, Berlin: Gruyter Ser. Nonlinear Anal. Appl., 15, de Gruyter, 2011. MR2814745

62. A.I. Prilepko, D.G. Orlovsky, I.A. Vasin, Method for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics, Marcel Dekker: Monograths and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, 2000. MR1748236

63. A. G. Ramm, Inverse problems, Mathematical and Analytical Techniques with Applications to Engineering, New York: Springer, 2005. MR2838778

64. R. Riganti, E. Savateev, Solution of an inverse problem for the nonlinear heat equation, Commun. Partial Diff. Equations, 19:1 (1994), 1611–1628. MR1294473

65. I.A. Vasin, On the existence and uniqueness of the generalized solution of the inverse problem for the nonlinear non stationary Navier-Stokes system in the case of integral overdefinition, Mathematical notes, 54:4 (1993), 34–44 (in Russian); English translation: I.A.Vasin, On the existence and uniqueness of the generalized

solution of the inverse problem for the nonlinear non stationary Navier-Stokes system in the case of integral overdefinition, Math. Notes Phys., 54:4 (1993), 1002–1009. MR1256605

66. A.I. Prilepko, I.A. Vasin, Investigation of the uniqueness of solutions in some nonlinear inverse problems of hydrodynamics, Differential equations, 26:1 (1990), 109–120, (in Russian). MR1050366

67. U.U. Abylkayrov, S.E. Aitzhanov, Inverse problem for non-stationary system of magnetohydrodynamics, Boundary Value Problems, 2015:1, 173 doi: 10.1186/s13661-015- 0438-x, 2015.

68. S.N. Antontsev, S.E. Aitzhanov, Inverse problem for an equation with a nonstandard growth condition, Journal of Applied Mechanics and Technical Physics, 2:60 (2019), 93–106 (in Russian); English translation: S.N. Antontsev, S.E. Aitzhanov, Inverse problem for an equation with a nonstandard growth condition, Journal of Applied Mechanics and Technical Physics, 2:60 (2019), 265–277. MR3969677

69. A. Eden, V.K. Kalantarov, On global nonexistence of solutions to an inverse problem for semilinear parabolic equations, J. Math. Anal. Appl., 307 (2005), 120–133. MR2138979

70. S. Gur, M. Yaman, Y. Yilmaz, Finite time blow up of solutions to an inverse problem for a quasilinear parabolic equation with power nonlinearity, J. Nonlinear Sci. Appl., 9 (2016), 1902–1910. MR3452687

71. V.K. Kalantarov, O.A. Ladyzhanskaya, Formation of collapses in quasilinear equations of parabolic and hyperbolic types, Zap. Nauchn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov, LOMI, 69 (1977), 77–102 (in Russian); English translation: J. Soviet Math. 10:1 (1978), 53–70. MR0604036

72. Bertsch, M., Mimura, M., Wakasa, T.: Modelling contact inhibition of growth: traveling waves. Netw. Heterog. Media 8, 131–147 (2013) 2. Farkas, M.: On the distribution of capital and labor in a closed economy. Southeast Asian Bull. Math. 19, 27–36 (1995)

73. Farkas, M.: On the distribution of capital and labor in a closed economy. Southeast Asian Bull. Math. 19, 27–36 (1995)

74. Fife, P.C.: Mathematical Aspects of Reacting and Diffusing Systems, Lecture Notes in Biomathematics,28 , Springer Verlag (1979)

75. Guedda, M., Kersner, R., Klincsik, M., Logak, E.: Exact wavefronts and periodic patterns in a competition system with nonlinear diffusion. Discrete Contin. Dyn Syst. Series B. 19(6), 1589–1600 (2014)

76. Horstmann, D.: Remarks on some Lotka-Volterra type cross-diffusion models. Nonlin. Anal. 8, 90–117 (2007)

77. Preziosi, L., Tosin, A.: Multiphase modelling of tumour growth and extracellular matrix interaction: mathematical tools and applications. J. Math. Biol. 58, 625–656 (2009)

78. Shigesada, N., Kawasaki, K.: Biological Invasion: Theory and Practice, Oxford University Press, (1997)

79. Shigesada, N., Kawasaki, K., Teramoto, E.: Spatial segregation of interacting species. J. Theor. Biol. 79, 83–99 (1979)

80. Svantnerné Sebestyén, G., Faragó, I., Horváth, R., Kersner, R., Klincsik, M.: Stability of patterns and of constant steady states for a cross-diffusion system, J. Comput. Appl. Math.293, 208–216 (2016)
81. Tsyganov, M.A., Biktashev, V.N., Brindley, J., Holden, A.V., Ivanitsky, G.R.: Waves in systems with cross-diffusion as a new class of nonlinear waves. Phisics-Uspekhi 50(3), 263–286 (2007)
82. Turing, A.M.: The chemical basis of morphogenesis. Phyl. Trans. Roy. Soc. Lond. B237, 37–72 (1952)
83. Vanag, V.K., Epstein, I.R.: Cross-diffusion and pattern formation in reaction-diffusion systems. Phys. Chem. Chem. Phys. 11, 897–912 (2009)
84. Кангужин Б. Е. Русско-казахский, казахско-русский словарь. Математика. Том 2. "Қазақпарат" баспа корпорациясы, 2014 ж. 20 бет.
85. Ақанбай Н. Қазақша-орысша, орысша-қазақша терминологиялық сөздік. Математика. Серия 2. "Қазақпарат" баспа корпорациясы, 2014 ж.
86. Иманқұл Т. Ш. Қазақша-орысша, орысша-қазақша терминологиялық сөздік Механика және машинатану. "Қазақпарат" баспа корпорациясы, 2014 ж.
87. Aitzhanov S.E., Zhanuzakova D.T. Behavior of solutions to an inverse problem for a quasilinear parabolic equation // Siberian Electronic Mathematical Reports. -2019. –Vol. 16. –P.1366-1382. DOI 10.33048/SEMI.2019.16.097.
88. Antonsev A.N., Aitzhanov S.E., Zhanuzakova D.T. An initial boundary value problem for a pseudoparabolic equation with a nonlinear boundary condition // Mathematical Methods in the Applied Sciences. 2022. DOI 10.1002/mma.8568.
89. Kersner R., Klincsik M., Zhanuzakova D.T. A competition system with nonlinear cross-diffusion: exact periodic patterns//Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Fisicas y Naturales-Serie A: Mathematicas. 2022. DOI 10.1007/s13398-022-01299-1.
90. Айтжанов С.Е., Жанузакова Д.Т. Разрушение решений обратной задачи для уравнения теплопроводности со степенной нелинейностью // Хабаршы, Абай атындағы ҚазҰПУ, 192-202 бет, №3(63), 2018.
91. Айтжанов С.Е., Жанузакова Д.Т. Разрушение решений обратной задачи для параболического уравнения//ҚазҰТУ хабаршысы; Техникалық ғылымдар сериясы, 586-593 бет, №3(133), 2019.
92. Мухамбетжанов С.Т., Жанузакова Д.Т. О корректности одной модели теории фильтрации типа Стефана//Хабаршы, Абай атындағы ҚазҰПУ, 71-77 бет, №1(65), 2019.

ЖАРИЯЛАНЫМДАР

Диссертациялық зерттеу нәтижелері бойынша 12 жұмыс жарияланды, оның ішінде:

– Clarivate Analytics Journal Citation Reports бойынша сәйкес төртінші және бірінші квартильдерге енгізілген және/немесе Scopus дерекқорында CiteScore пайыздық көрсеткіштері сәйкесінше 35, 91, 96 болатын ғылыми журналдардағы 3 мақала:

1. Aitzhanov S.E., Zhanuzakova D.T. «Behavior of solutions to an inverse problem for a quasilinear parabolic equation»// Siberian Electronic Mathematical Reports. -2019. –Vol. 16. –P.1366-1382. DOI 10.33048/SEMI.2019.16.097 (Scopus: процентиль – 35%, Web of Science: **Q4**, Impact factor =0,545, SJR – 0.516).

2. Antonsev A.N., Aitzhanov S.E., Zhanuzakova D.T. «An initial boundary value problem for a pseudoparabolic equation with a nonlinear boundary condition» //Mathematical Methods in the Applied Sciences. -2022.-P.1111-1136. DOI 10.1002/mma.8568 (Scopus: процентиль – 91%, Web of Science: **Q1**, Impact factor =3,007, SJR – 0.702).

3. Kersner R., Klincsik M., Zhanuzakova D.T. «A competition system with nonlinear cross-diffusion: exact periodic patterns»//Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Fisicas y Naturales-Serie A: Mathematicas. 2022. DOI 10.1007/s13398-022-01299-1 (Scopus: процентиль – 96%, Web of Science: **Q1**, Impact factor =2,276, SJR – 1.055).

–ҚР БҒМ Білім және ғылым саласында сапаны қамтамасыз ету комитеті ұсынған журналдарда 3 мақала:

1. Айтжанов С.Е., Жанузакова Д.Т. «Разрушение решений обратной задачи для уравнения теплопроводности со степенной нелинейностью»//Хабаршы, Абай атындағы ҚазҰПУ, 192-202 бет, №3(63), 2018.

2. Айтжанов С.Е., Жанузакова Д.Т. «Разрушение решений обратной задачи для параболического уравнения»//ҚазҰТУ хабаршысы; Техникалық ғылымдар сериясы, 586-593 бет, №3(133), 2019.

3. Мухамбетжанов С.Т., Жанузакова Д.Т. «О корректности одной модели теории фильтрации типа Стефана»//Хабаршы, Абай атындағы ҚазҰПУ,71-77 бет, №1(65), 2019.

– халықаралық конференциялар жинағында 7 жарияланым:

1.Мухамбетжанов С.Т., Жанузакова Д.Т. «Обоснование метода фиктивных областей для модели Маскета-Леверетта»//Международная научно-методическая конференция "Математика в Казахстане-прошлое и перспективы", посвященная 100-летию Ибрашева Хасана Ибрашевича, 2016.

2.Мухамбетжанов С.Т., Абенов Б., Жанузакова Д.Т. «On the Application of Quasi-Conformal Mappings to Solve the Problem of Filtration Theory»//The 5th

Abu Dhabi University Annual International Conference Mathematical Science and its Applications, P. 35, 20-22 April, 2017.

3. Жанузакова Д.Т., Абдиахметова З. «About One Problem of the Isothermal Filtration Process»//The 6th Abu Dhabi University Annual International Conference Mathematical Science and its Applications, P.64, 9-21 December, 2017

4. Жанузакова Д.Т., Утепкалиев С. «On the Development of a Mathematical Model of Nonequilibrium Filtration»//The 7th Abu Dhabi University Annual International Conference Mathematical Science and Its Applications, P.24, 9-12 May, 2018.

5. Мухамбетжанов С.Т., Жанузакова Д.Т. «Correctness of a one mathematical model of nonequlibrium phase transitions of water in porous media»// Дифференциалдық теңдеулер және анализ мәселелері, VIII Халықаралық ғылыми конференция, Қ. Жұбанов атындағы Ақтөбе өңірлік мемлекеттік университеті, 64-72 бет, 01.11.2018.

6. Айтжанов С.Е., Жанузакова Д.Т. «Разрушение решений обратной задачи для параболического уравнения со степенной нелинейностью»//Анализдің, дифференциалдық теңдеулердің және алгебраның өзекті мәселелері, 07.02.2019.

7. Жанузакова Д.Т. «An initial boundary value problem for a pseudoparabolic equation with a nonlinear boundary condition»//Жаратылыстанудың кері және қисынды емес есептері атты Халықаралық ғылыми конференциясының материалдары, 29 бет, 11-12 сәуір, 2023.